

問 3.1-2

問題の趣旨：放物運動なので、起こっていることはとても単純だが、条件が複雑でつかいにくい問題である。ゆっくりと論理を組み立てることがここでの趣旨である。それから、ともすれば式変形に追われ気味になるかもしれないが、「結局はどういうことなのか」を立ち止まって考えてみて欲しい、ボールを投げているだけの問題なので...

まず、基本的なことからまとめる。この問題では、壁までの距離 l と壁の高さ h が与えられているとして、変数は初速度 v_0 と水平面とのなす投げ上げ角 θ である。初速度を v_0 としたときに、水平方向 (x 方向) と鉛直方向 (z 方向) の初速はそれぞれ $(v_0 \cos \theta, v_0 \sin \theta)$ となる。それぞれの方向についての運動方程式の解析から、時刻 t における球の位置は、

$$\begin{aligned} z(t) &= v_0 t \sin \theta - \frac{1}{2} g t^2 \\ x(t) &= v_0 t \cos \theta \end{aligned}$$

である。壁が無いとして、 $t \neq 0$ で再び地面に到着する時刻 t^* は、 $z(t^*) = 0$ より、

$$v_0 \sin \theta - \frac{1}{2} g t = 0 \implies t^* = \frac{2v_0}{g} \sin \theta$$

と求まり、そのときの飛距離 $x(t^*)$ は、

$$x(t^*) = \frac{2v_0^2}{g} \cos \theta \sin \theta = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\theta) = \frac{v_0^2}{g} \frac{\tan \theta}{1 + \tan^2 \theta}$$

となる。このことから、最高到達地点は、投げ上げ角が $\theta = \pi/4$ のときであることがわかる。さらに角度が大きくなると、単調に飛距離は減少する。

次に、球が壁を越える条件を考えてみる。水平方向には等速直線運動するので、壁の位置に球がくる時間 T は、 $v_0 T \cos \theta = l$ が成り立つ。条件はその時刻における $z(t)$ が壁の高さよりも高いことである。すなわち、

$$v_0 T \sin \theta - \frac{1}{2} g T^2 = l \tan \theta - \frac{g l^2}{2 v_0^2 \cos^2 \theta} > h$$

である。この不等式を満たす変数 (θ, v_0) の領域で球は壁を越えられる。領域の境界は不等号を等式と替えた方程式

$$\tan^2 \theta - \frac{2v_0^2}{g l} \tan \theta + 1 + \frac{2v_0^2 h}{g l^2} = 0$$

で与えられる。 $\tan \theta$ について、その方程式を解いてみると、

$$\tan \theta = \frac{v_0^2}{g l} \pm \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{g l}\right)^2 - \left(1 + \frac{2v_0^2 h}{g l^2}\right)} \quad (36)$$

である。この解は2つの線(分岐)からなっており、それらに囲まれている領域で条件が満たされる。変数 $\tan \theta$ と v_0^2 について、その境界と領域を図7に示した。

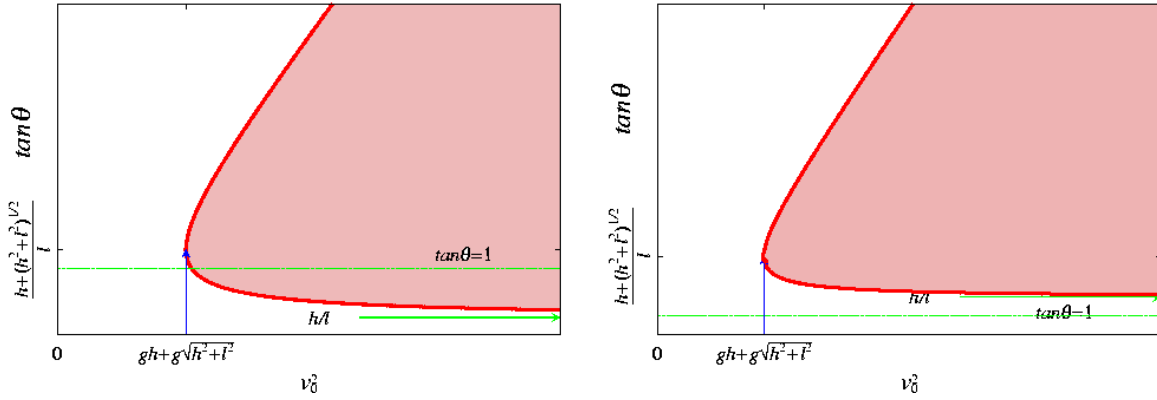


図 7: 球が壁を越える条件を満たす変数 $(\tan \theta, v_0^2)$ の領域. 左は, h/l が 1 よりも小さい場合. 右はその逆に $h/l > 1$ の場合である. 最大飛距離を出す投げ上げ角が, $\theta = \pi/4$, つまり $\tan \theta = 1$ であることに注意すると, 条件を満たす領域に $\tan \theta = 1$ を含むと, そのときに最大飛距離を与え, そうでない場合 (右図) は, 条件を満たしながら投げ上げ角が最小の時に最大飛距離を与える. どちらの場合も最小飛距離は, 最大投げ上げ角, つまり, 上の境界線がそれを与えている.

投げ上げ角 θ の条件 ($0 < \theta < \pi/2$) から, $\tan \theta$ の取り得る値は正の実数である. 実数であるための条件から, v_0 についての制限が出てくる. それは,

$$\left(\frac{v_0^2}{gl}\right)^2 - \left(1 + \frac{2v_0^2 h}{gl^2}\right) > 0 \implies v_0^2 > g(h + \sqrt{h^2 + l^2})$$

であり, v_0 についての最小値が決まる (図 7 にて矢印で記したところ)²⁴. ここで, 改めて式 (36) を見ると, v_0 の大きい極限で $\tan \theta$ は定数になっていることがわかる. その値は, h/l である²⁵. 図 7 では, $h/l < 1$ (左) と $h/l > 1$ (右) を別けてみた. 求めたい問題は, v_0 を指定して, θ を変えたときの最大飛距離 $x_{\max}$ と最小飛距離 $x_{\min}$ を知る ということである. 最小飛距離 $x_{\min}$ を出すのは, どちらも 投げ上げ角最大, つまり図の上の境界線上である.

$$x_{\min} = \frac{2v_0^2}{g} \frac{\tan \theta}{1 + \tan^2 \theta} = l \frac{\tan \theta}{\tan \theta - h/l} = l \frac{v_0^2 + \sqrt{v_0^4 - g^2 l^2} - 2v_0^2 g h}{v_0^2 - gh + \sqrt{v_0^4 - g^2 l^2} - 2v_0^2 g h} \quad (37)$$

2 番目の等式では, 境界を決める式 (36) より, $1 + \tan^2 \theta = \frac{2v_0^2}{gl} \tan \theta - \frac{2v_0^2 h}{gl^2}$ の関係を使った²⁶. これに対して, 最大飛距離は, 図を見るといくつかの場合に分けられることがわかる. 特に, 壁が無いときに最大飛距離を実現する投げ上げ角度が $\theta = \pi/4$ ($\tan \theta = 1$) であることに注意すると, $h/l < 1$ と $h/l > 1$ では状況が異なることがわかり, $\tan \theta = 1$ かあるいは, 最小投げ上げ角ということになる²⁷.

²⁴ ある程度がんばって投げないと, 壁は越えられないという当り前の条件である.

²⁵ 超豪速球を投げられれば, 壁の上端めがけて投げたときに, 最小の投げ上げ角で壁を越えられる.

²⁶ この式の v_0 を大きい極限をとると, $x_{\min} = l$ となる. 豪速球を限りなく垂直に投げると, 限りなく壁のすぐ向こうに到着するということ.

²⁷ 左 $h/l < 1$ の場合でも, 初速 v_0 の値によっては, $\tan \theta = 1$ が壁を越えられないこともある (境界領域の左端のあたり).

1. $h/l > 1$ (壁が高い場合) :

$$x_{\max} = l \frac{v_0^2 - \sqrt{v_0^4 - g^2 l^2 - 2v_0^2 g h}}{v_0^2 - gh - \sqrt{v_0^4 - g^2 l^2 - 2v_0^2 g h}} \quad (38)$$

2. $h/l < 1$ (壁が低い場合) : かつ

(a) $v_0^2 < \frac{gl}{1-h/l}$ の時 : $\tan \theta > 1$ なので, やはり上の式と同じ.

(b) $v_0^2 \geq \frac{gl}{1-h/l}$ の時 : 最大飛距離は $\tan \theta = 1$ で与えられる.

$$x_{\max} = \frac{2v_0^2}{g} \frac{\tan \theta}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{v_0^2}{g} \quad (39)$$

これ以外の領域が球のとんで来ない安全な領域である. その領域を v_0 の関数として書いてみるとよいだろう.