

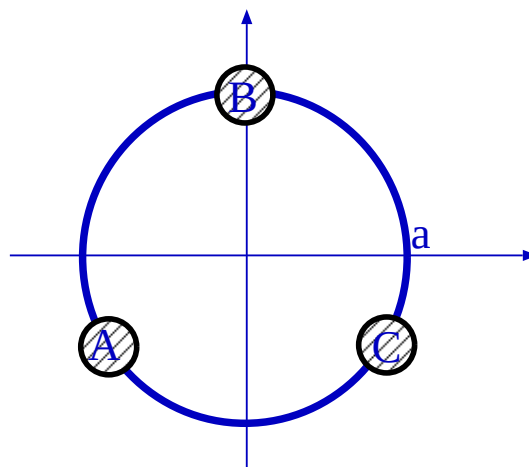
第一回電磁気Bレポート問題解答例

問題 1

電場をベクトルとして考える習慣になれることが、この問題の趣旨である。

1. つりあいの位置

直観的には正三角形に並べるのがよさそうに思う。実際に正三角形の頂点の位置に電荷を置いて、それらのクーロン力の合力を求めてみると、少なくとも接線方向には力はつりあっていることが示される。



少しだけ捕捉をしておく。まず、一般性を失うことなく、3つの電荷のうちの一つの座標を y 軸上に座標 $(0, a)$ 置くとする。この電荷が静止するためには、接線方向の力、つまり残りの2つから働くクーロン力の合力のうち x 成分がゼロになっていることが必要である。 y 成分はリングの拘束力がそれを支えてくれる。図のように B を y 軸上に置いたとすると、残りの A, C の位置をそれぞれ、 $(x_A, y_A), (x_C, y_C)$ とする。もちろん、リング上にあるので、 $x_A^2 + y_A^2 = x_C^2 + y_C^2 = a^2$ である。このとき、 B に働く力の x 成分 F_x は、

$$F_x = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{-x_A}{(x_A^2 + (y_A - a)^2)^{3/2}} + \frac{-x_C}{(x_C^2 + (y_C - a)^2)^{3/2}} \right)$$

となり、これが0になる条件を解くと、 $y_A = y_C$ であることが導かれる¹。つまり、 y 座標の値が共通であれば、どこでもよいことになる。これが、 B が静止するための条件である。一方で、 A, C も静止する必要があるので、同じ議論をすれば、 A から見たときの B, C の距離も同じところであればよく、 C についても同様である。結局、全てが等距離になるときに接線方向の力はつりあうことがわかる。

2. 中心部分の電場 電荷は正三角形に並ぶことがわかったので、それらの3つの電荷が原点に作る電場はそれぞれの電場を重ね合わせればよい。答えは、 $\mathbf{F}_{\text{原点}} = (0, 0)$ である。

¹ どうやって解くのかと聞かれたのだが、解くべき方程式は、

$$\frac{-x_A}{(x_A^2 + (y_A - a)^2)^{3/2}} = \frac{x_C}{(x_C^2 + (y_C - a)^2)^{3/2}}$$

である。 $x_A^2 + y_A^2 = a^2$ に注意すると、 y_A の方程式

$$\frac{a - y_A}{(a + y_A)^2} = \frac{a - y_C}{(a + y_C)^2}$$

がわかり、これは二次方程式なので解けて、 $(y_A - y_C)((a - y_C)y_A - a(y_C + 3a)) = 0$ となる。

問題 2: 「ベクトル演算の練習」

これは具体的にベクトル場の演算を計算する練習である。順に示していく。

2-1. ベクトルの成分をそれぞれ $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$, $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$ として、左辺から計算すると、

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (A_y B_z - A_z B_y, A_z B_x - A_x B_z, A_x B_y - A_y B_x) \\&= \frac{\partial A_y}{\partial x} B_z + A_y \frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial A_z}{\partial x} B_y - A_z \frac{\partial B_y}{\partial x} + \frac{\partial A_z}{\partial y} B_x + A_z \frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{\partial A_x}{\partial y} B_z - A_x \frac{\partial B_z}{\partial y} \\&\quad + \frac{\partial A_x}{\partial z} B_y + A_x \frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{\partial A_y}{\partial z} B_x - A_y \frac{\partial B_x}{\partial z} \\&= B_x \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + B_y \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + B_z \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \\&\quad - A_x \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) + A_y \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) + A_z \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) = \text{右辺}\end{aligned}$$

となり、恒等式を示すことができる。注意すべきは、ナブラは普通のベクトルではなく、微分演算子であることである。

2-2. これも定義に従って計算する。

$$\begin{aligned}A_x &= \frac{\partial}{\partial x} \log \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right) = \frac{\frac{1}{2} 2x (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)} \\A_y &= \frac{\partial}{\partial y} \log \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right) = \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)} \\A_z &= \frac{\partial}{\partial z} \log \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right) = \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)}\end{aligned}$$

このベクトル場 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ はクーロンの電場に似ているが、異なる。中心力であるところは共通であるが、その大きさは距離に二乗ではなくて、一乗に反比例している。確かめてみよう。

問題 3 これは (練習問題 2-1.4) に簡単にまとめてある。個別の対応はそれぞれに返答することにして、興味深い解答はどこかで公表することにする。