第四回電磁気レポート問題解答例

福島孝治 (東大院総合文化)

問題 1 ガウスの法則を用いて，電場を求めて，このコンデンサーの電気容量を求めることにする．まずは，二つの導体球殻に電荷を与えると，生じる電場は対称性から動径方向のみである．球殻の原点からの距離 r の関数として，その電場の成分を $E_r(r)$ とする．閉曲面として，半径 $r(a < r < b)$ の球を考えると，ガウスの法則より、

$$\int dS\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E} = 4\pi r^2 E_r(r) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

となり，$E_r = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{1}{r^2}$ であることがわかる．二つの導体球殻の間の電位差 V は,

$$V = \int_{\text{内側}}^{\text{外側}} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{x} = \int_a^b E_r dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_a^b \frac{1}{r^2}dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left.\frac{-1}{r}\right|_a^b = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

となる．電気容量 C の定義は，電荷量を Q として，$Q = CV$ であるから，求める電気容量は,

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

と求まる．平板コンデンサーの場合と同様に，二つの

このコンデンサーの静電エネルギー U は，一般にコンデンサーに電荷を貯める仕事から，$U = \dfrac{qV}{2}$ となるので，そこに代入すればよい．レポートの解答でもそれがほとんどだった．せっかくなので，電場のエネルギーから計算してみる[1]．電場は球殻導体の間の空間にしか存在しないことに注意すると,

$$U = \frac{\epsilon_0}{2}\int \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}dV = \frac{\epsilon_0}{2}\int_a^b E_r^2 4\pi r^2 dr = \frac{\epsilon_0}{2}\int_a^b \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0^2}\frac{1}{r^2}dr = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

となる．これはやはり，$U = \dfrac{q^2}{2C} = \dfrac{qV}{2}$ である．

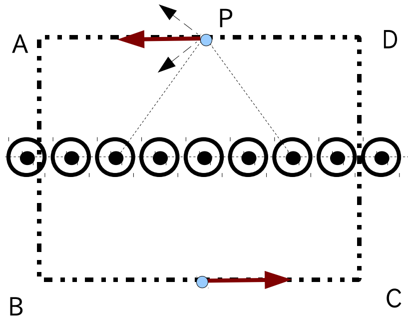
問題 2 この問題はアンペールの法則の応用問題である．まず，十分に広い一枚の平面上を流れる電流を考える．ここでの表面の電流密度を J とすると，これは $J = I/w$ である．この電流は一様な密度の線電流の集合とみなして，平面の外側のある点 P における磁場を考える．図からわかるように，点 P に対して，対称な二つの線電流の作る磁場を重ね合わせると，電流面に平行なことがわかる．十分広い平面ではいつでもこのような対が選べるので，全電流からの寄与を全て重ね合わせても電流面に平行であることがわかる．向きは，図のように電流面の上側では図の左向きで，下側は右向きになる．

[1] 講義では電場のエネルギーとしての表現の導出をサボったので，気になる人のためにここで説明しておく。一般に，電荷密度 ρ のときの静電エネルギー U は,

$$U = \int \rho\phi dV = \epsilon_0\int \nabla\cdot\boldsymbol{E}\phi dV = \epsilon_0\int \nabla\cdot(-\nabla\phi)\phi dV = \epsilon_0\int(-\nabla\phi)\cdot(-\nabla\phi)dV = \epsilon_0\int \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}dV$$

である。ここで，積分領域は全空間である。途中には，ガウスの法則や部分積分を使っている。

また並進対称性より，電流面からの距離が一定の平面では磁場の値は一定になる．その値を B_r とする．ここで，電流面を横切るように閉曲線 ABCD を考え，アンペールの法則を当てはめると，アンペールの法則の左辺は，

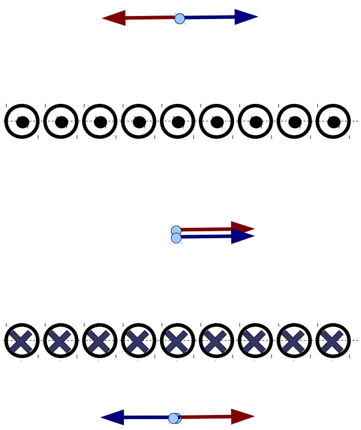


$$\int \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{x} = \int_A^B \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{x} + \int_B^C \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{x} + \int_C^D \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{x} + \int_D^A \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{x}$$

であるが，線分 AB と CD の間では，$\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{x} = 0$ であり，線分 BD を l とすると，

$$\int \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{x} = 2lB_r = \mu_0 Jl$$

となる．ここから，$B_r = \mu_0 \frac{J}{2} = \mu_0 \frac{I}{2w}$ となる．



問題では，電流の方向が反対向きの電流面が二枚ある．それぞれの寄与を重ね合わせると，平面間は同じ方向だから，二倍になり、$B_r = \frac{\mu_0 I}{w}$ となる．一方，外側は逆方向だから，キャンセルしてゼロになる．この問題は，ビオ＝サバールの法則を使って，外側をゼロとするのではない．一枚だけの平面電流からの寄与を考えると，無限遠でも有限の値をとっていることがわかる．大雑把には，$1/r^2$ の関数を二次元平面で積分するので，ゼロではないのである．ここでは，逆向きの寄与がキャンセルされていることが重要である．