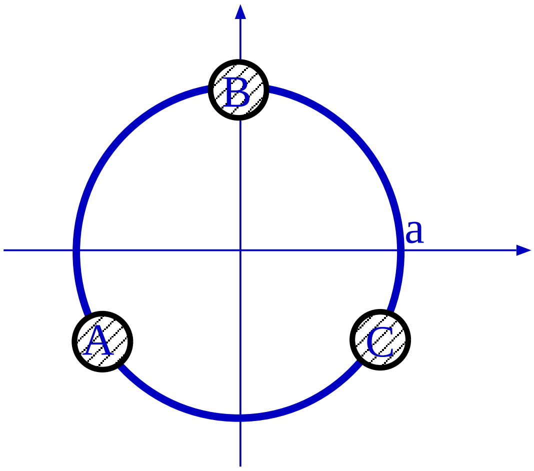
第一回電磁気学レポート問題 解答例

問題 1 (練習問題 **1-1.6**)

電場をベクトルとして考える習慣になれることが，この問題の趣旨である．

1．つりあいの位置



直観的には正三角形に並べるのがよさそうに思う．実際に正三角形の頂点の位置に電荷を置いて，それらのクーロン力の合力を求めてみると，少なくとも接線方向には力はつりあっていることが示される．

少しだけ捕捉をしておく．まず，一般性を失うことなく，3 つの電荷のうちの一つの座標を y 軸上に座標 $(0, a)$ 置くとするとする．この電荷が静止するためには，接線方向の力、つまり残りの 2 つから働くクーロン力の合力のうち x 成分がゼロになっていることが必要である．y 成分はリングの拘束力がそれを支えてくれる．図のように B を y 軸上に置いたとすると，残りの A,C の位置をそれぞれ，(x_A, y_A), (x_C, y_C) とする．もちろん，リング上にあるので，$x_A^2 + y_A^2 = x_C^2 + y_C^2 = a^2$ である．このとき，B に働く力の x 成分, F_x は,

$$F_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{x_A}{(x_A^2 + (y_A - a)^2)^{3/2}} + \frac{x_C}{(x_C^2 + (y_C - a)^2)^{3/2}}\right)$$

となり，これが 0 になる条件を解くと，$y_A = y_C$ であることが導かれる．つまり，y 座標の値が共通であれば，どこでもよいことになる．これが，B が静止するための条件である．一方で，A, C も静止する必要があるので，同じ議論をすれば，A から見たときの B,C の距離も同じところにあればよく，C についても同様である．結局，全てが等距離になるときに接線方向の力はつりあうことがわかる．

2．中心部分の電場 電荷は正三角形に並ぶことがわかったので，それらの 3 つの電荷が原点に作る電場はそれぞれの電場を重ね合わせればよい．

問題 2:「ベクトル演算の練習」

これは具体的にベクトル場の演算を計算する練習である．順に示していく．

2-1. ベクトルの成分をそれぞれ $\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z)$，$\boldsymbol{B} = (B_x, B_y, B_z)$ として，左辺から計算すると,

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(A_yB_z - A_zB_y, A_zB_x - A_xB_z, A_xB_y - A_yB_x) \\
&= \frac{\partial A_y}{\partial x}B_z + A_y\frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial A_z}{\partial x}B_y - A_z\frac{\partial B_y}{\partial x} + \frac{\partial A_z}{\partial y}B_x + A_z\frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{\partial A_x}{\partial y}B_z - A_x\frac{\partial B_z}{\partial y} \\
&\quad + \frac{\partial A_x}{\partial z}B_y + A_x\frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{\partial A_y}{\partial z}B_x - A_y\frac{\partial B_x}{\partial z}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= B_x\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)+B_y\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+B_z\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\\
&\quad -A_x\left(\frac{\partial B_z}{\partial y}-\frac{\partial B_y}{\partial z}\right)+A_y\left(\frac{\partial B_x}{\partial z}-\frac{\partial B_z}{\partial x}\right)+A_z\left(\frac{\partial B_y}{\partial x}-\frac{\partial B_x}{\partial y}\right)=\text{右辺}
\end{aligned}
$$

となり，恒等式を示すことができる．注意すべきは，ナブラは普通のベクトルではなく，微分演算子であることである．

2-2. これも定義に従って計算する．

$$
\begin{aligned}
A_x &= \frac{\partial}{\partial x}\log\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)=\frac{\frac{1}{2}2x(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)}\\
A_y &= \frac{\partial}{\partial y}\log\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)=\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)}\\
A_z &= \frac{\partial}{\partial z}\log\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)=\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)}
\end{aligned}
$$

このベクトル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ はクーロンの電場に似ているが，異なる．中心力であるところは共通であるが，その大きさは距離に二乗ではなくて，一乗に反比例している．確かめてみよう．

問題 3 これは (練習問題 **2-1.4**) に簡単にまとめてある．個別の対応はそれぞれに返答することにして，興味深い解答はどこかで公表することにする．

第三回電磁気Bレポート問題

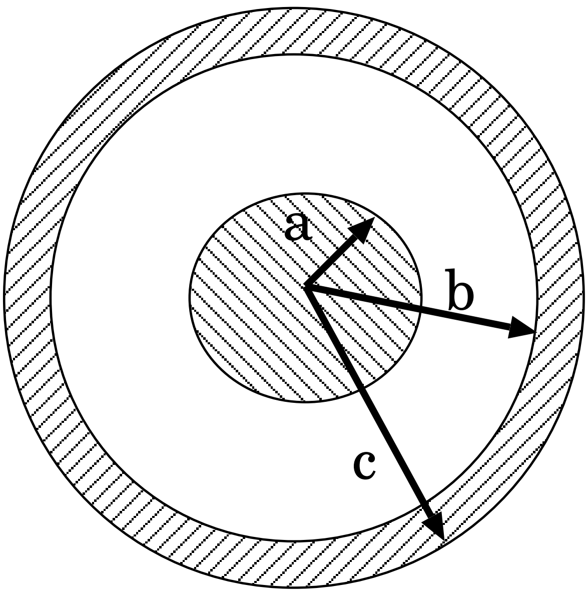
福島孝治 (東京大学大学院総合文化研究科)

平成 22 年 11 月 26 日: ver. 1.1

問題 1 「ガウスの法則+電位」： 一様に電荷分布した球 (半径 a) の作る電場をガウスの法則を用いて求めよ．答えだけでなく，その考え方も示し，電場の大きさを球の中心からの距離 r の関数としてグラフに図示せよ．また，電位を r の関数として求め，図示せよ．

問題 2「導体系にガウスの法則を使う ：] アルミでくるんだ半径 a のピンポン玉に電荷 $Q(>0)$ を与え，その外側を右図のように**導体球殻**(内径 $b(>a)$, 外径 c) で囲んだ．導体球殻の内側は絶縁体の膜があり，ピンポン玉の電荷は球殻には移動できないとする．

1. 下図のように，この導体球と導体球殻を同心に置いた場合に，電荷はどのように分布するか説明せよ．導体内部には電場はないことに注意せよ．
2. ガウスの法則を用いて，電場を求めよ．導体内部に電場がないことを確認せよ．
3. その場合の電位を求め，図示せよ．
4. 導体球の中心が導体球殻の中心からずれた場合に，電場や電位はどうなるかを理由を含めて説明せよ．
5. 導体球殻に電荷 $q(>0)$ を与えたときに，どうなるかを理由とともに説明せよ．
6. 同じように電荷 q が帯電された導体球殻が沢山あり，その中の一つだけに上の電荷を帯びた導体球 (ピンポン玉) が入っているとする．導体球殻は透明でなく，中は透けて見えない．このとき，どの導体球殻に導体球が入っているかを見つける方法を示せ．



問題 3：講義の感想や自由に記せ.