第二回電磁気Ｂレポート問題 解答例

福島孝治 (東大院総合文化)

問題１

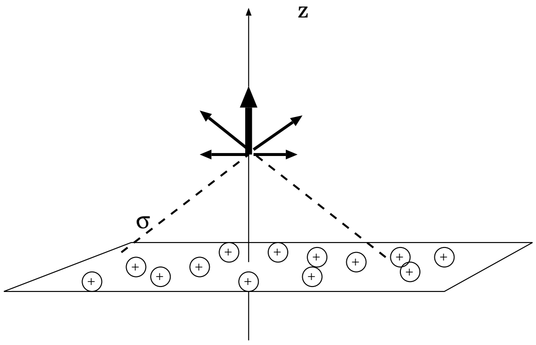
この問題は，ガウスの法則を使うことによって，電場を計算する練習問題である．まずは無限に広がった場合を考えることにする．この手の問題を考える手順は以下のとおりである．

1. 問題の対称性を考えて，存在する電場の成分を見極める．対称性がよい場合というのはいくつかの成分 (x 成分とか y 成分とか) がキャンセルされてゼロになっていることが多い．

2. 都合のよい閉曲面を見付けて，ガウスの法則を当てはめてみる．ここで，都合がよいというのはどういうことだろうか．ガウスの法則は，任意の閉曲面から沸き出した全電場が閉曲面内部の総電荷量に等しいことを言っている．実際に当てはめてみるには，閉曲面からの**わきだし (発散)**，すなわち，電場の閉曲面に対する**法線成分**$(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E})$ を面全体に渡って積分しなくてはならない．「都合がよい」というのはこれがサボれるという意味である．つまり，閉曲面の電場の法線成分がどこでも同じであるか，電場と面の法線ベクトルが垂直になっていてゼロであると、「都合良く」計算できるわけである．

対称性の考察

一枚の導体板の場合を考え，求めた電場を後から二枚分重ねあわせることにする．まず，並進操作に対して不変性がある．ちょっと格好付けて難しい言葉を使ってみたが，大した意味はない．平面に平行な方向に対してどこも特別な点はない．このことから，電場は平面からの距離だけにしか依らないことがわかる．そこで，適当な場所に z 軸を設定し，その軸上での電場を求めることは一般性を失わない．図 1(左) から平面に平行の方向は必ずキャンセルされ，垂直な成分 E_z しか存在しないことがわかる．



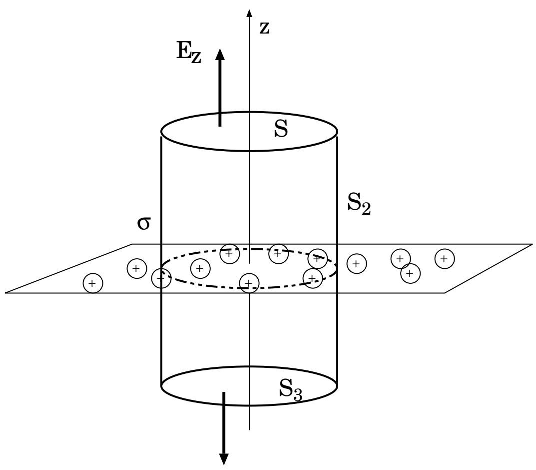


図 1: (左) 電場の xy 成分がキャンセルする様子．(右) ガウスの法則のあてはめ．閉曲面は円筒とした．

ガウスの法則の当てはめ

いま，閉曲面として，断面積 A の円筒を選び，上下の両底面を帯電平面に平行にとる．上下の底面をそれぞれ，S_1, S_3 として，側面を S_2 とする．この閉曲面に対してガウスの法則を当てはめる．

$$\int_{\text{閉曲面 } S} dS\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E} = \int_{S_1} dS\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E} + \int_{S_2} dS\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E} + \int_{S_3} dS\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E}.$$

ここで，側面 S_2 の法線方向は帯電面に平行であるから，電場と面の法線ベクトルは直交していいて，$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E} =$ である．つまり，第 2 項は消える．上下底面での法線成分は E_z であり，面上の**場所には依存しない**ことから，

$$\int_{\text{閉曲面 } S} dS\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E} = \int_{S_1} dSE_z + \int_{S_3} dSE_z = 2AE_z.$$

一方で，閉曲面に囲まれた領域に存在する総電荷量は $A\sigma$ であるから，

$$2AE_z = A\sigma/\epsilon_0 \Longrightarrow E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad \text{あるいは} \quad \boldsymbol{E} = \left(0, 0, \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\right) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\frac{\boldsymbol{z}}{|\boldsymbol{z}|} \tag{1}$$

少し驚いたことに，この電場は平面からの距離に依存しない．もはや選んだ閉曲面は円筒でなくてもよいことがわかる．

この結果から，導体板二枚合わせるのがこの問題である．最も簡単なコンデンサーになっている．平板は無限に広いと仮定しているので，重ね合わせの原理から，$E_z = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ となる．一様な電場が平板の間にのみ，面に垂直な方向に存在する．平板の外側では電場はキャンセルしてゼロになる．電気力線を以下に示す．

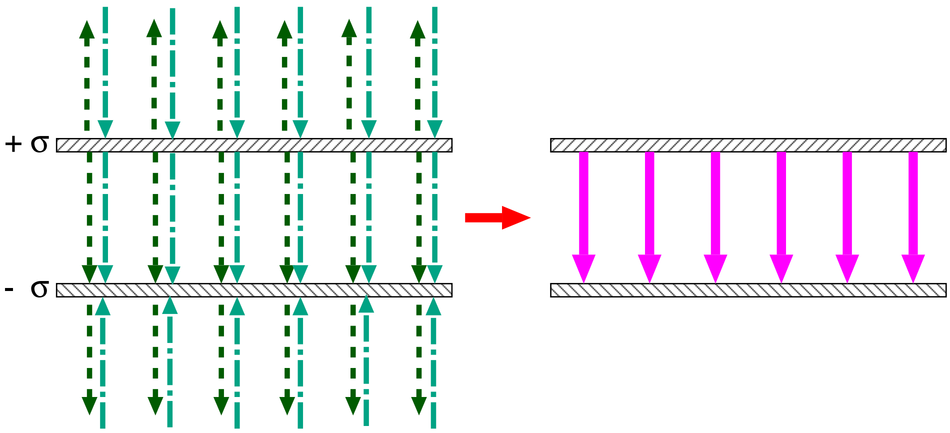


図 2: それぞれの導体板が作る電気力線を左に示す．上の導体板の作る電場の電気力線を点線で、下の導体板のものを破線で描いた．重ね会わせた結果は右図のようになる．

このとき，二枚の平板の間の電位差 ΔV は，

$$\Delta V = \int d\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{E} = \int_0^d dzE_z = \frac{\sigma d}{\epsilon_0}$$

となる．また，平板の面積を S として，それぞれの平板に与えた電荷を $\pm q$ とすると，電位差は，$\Delta V = \frac{qd}{\epsilon_0 S}$ となる．このコンデンサーの電気容量は，

$$C = \frac{q}{\Delta V} = \frac{\epsilon_0 S}{d}$$

である．

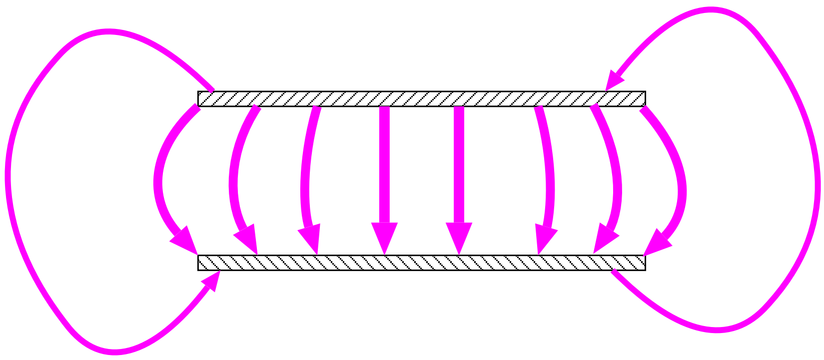


図 3: コンデンサーの大きさが有限のときの電気力線．少し定性的すぎるかもしれないが，こんな感じ．コンデンサーの両端から電場はしみでていてる．

さて，帯電平面が無限でない場合にどうなるかを考えてみよう．まず，有限であることから，並進の対称性は無くなってしまう．例えば平面が正方形の場合は，観測位置を平行移動するともはや元の位置とはずれてしまっている．結果として，図 1(左) のように必ず電場の水平成分をキャンセルする相棒がいる保証はない．唯一水平成分がキャンセルする位置は，ちょうど正方形の中心だけである．それ以外では水平成分は残る．もちろん，ガウスの法則はこの場合にも成立する．このとき，上と同様な閉曲面を考えた場合，側面からも電場のわきだしがあり，しかも側面の位置に依存していて，その積分を評価するのは大変面倒になる．ここまでくると，先になぜガウスの法則だけから電場が求まることがあるのか?という問いに答えられるであろう．

問題 2

1. 今回のレポートのテーマはガウスの法則を理解すること．この問題もうまくガウスの法則を利用することを考える．まず，点電荷を囲む半径 a の球を閉曲面として，ガウスの法則よりを適用すると，

$$\int_{\text{球}} dS\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

となる．球を半分に分割したとき，上下の半球は同等なので，電束は全球の半分となる．つまり，求めたい電束 ϕ は，

$$\phi = \frac{q}{2\epsilon_0}$$

である．もちろん，電場を積分することもできる．

2. 求める電束を ϕ_2 とすると，前問の ϕ とあわせて，ガウスの法則から，

$$\phi + \phi_2 = 0$$

となる．蓋をした閉曲面の内部に電荷はないからである．ここから，すぐに答えは，

$$\phi_2 = -\phi = -\frac{q}{2\epsilon_0}$$

と分かる．

3. 蓋の形が変わっても，ガウスの法則は成り立つのである．求める電束 ϕ_3 は，1．で求めたものと同じである．

$$\phi_3 = \frac{q}{2\epsilon_0}$$

これも，やはり積分で求めることはできるだろうが，面倒である．