

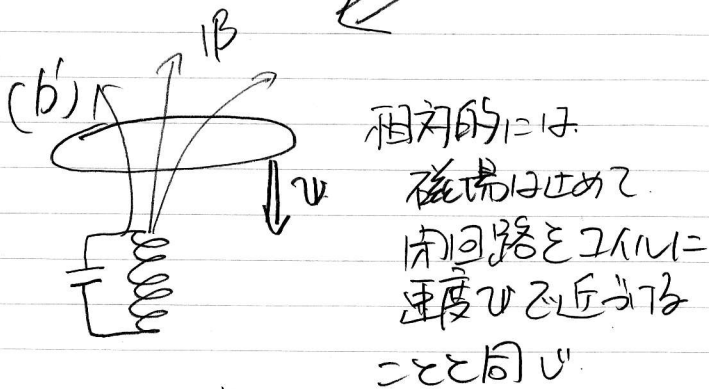
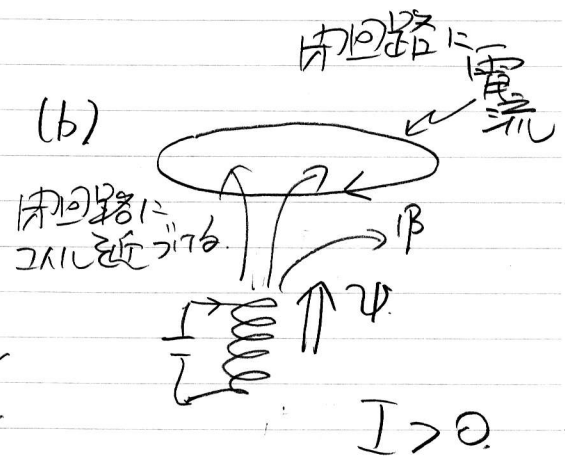
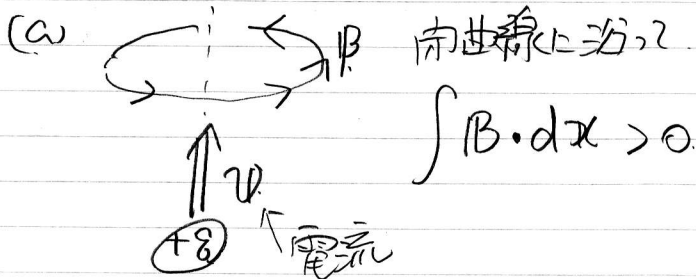
5 電磁誘導とマクスウェル方程式

5-1 電磁誘導

(a) 電荷と電圧
(電流)

ゼノ-ファラデーの法則
 $\Rightarrow$ 磁場

(b) 電流の発生 $\Leftarrow$ 磁場の变化
 $\Uparrow$
 電場が誘起



$I > 0$
 $\Leftarrow$
 導線内部に
 電場が誘起
 この現象はコイルの
 法則では説明がつかない

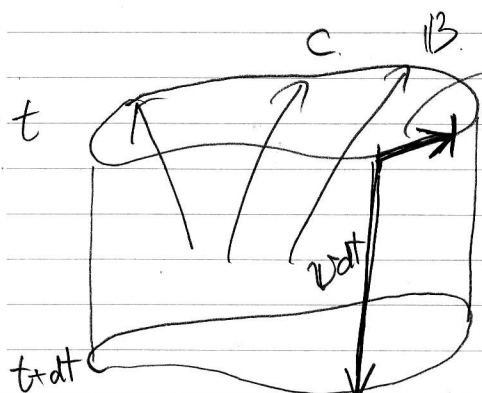
磁場中で止まっている
 電荷に働く力は不明

$\Downarrow$
 導線中の電荷にはローレンツ力が働く

静磁場 $\mathbf{B}$ 中の

$\hookrightarrow$ 起電力: 回路に電流を流すための力

図 閉回路 C の起電力



dx : 閉回路 C の微小領域 dx だけ
時間 dt の間に $v dt$ だけ移動

・ 導線の電荷に働く力 $\Rightarrow$ ローレンツ力 $q v \times B$
 $\Rightarrow$ 電場 $E_i = v \times B$

起電力 V : 閉回路 C に沿って $E_i \cdot dx$ を積分

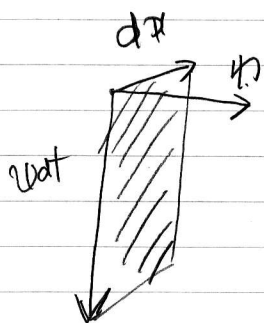
$$V = \int_{\text{閉回路}} E_i \cdot dx = \int (v \times B) \cdot dx = \int (v dt \times B) \cdot dx / dt$$



ベクトル積の性質 $(A \times B) \cdot C = (B \times C) \cdot A = (C \times A) \cdot B$

$$= \int (dx \times v dt) \cdot B / dt = - \int B \cdot (v dt \times dx) / dt$$

* $v dt \times dx$ はどんなベクトルか?



方向: $v dt$ と dx の作る面の法線方向

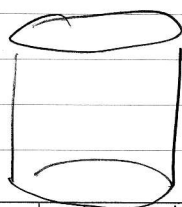
大抵: $|v dt \times dx|$ は 面の面積

$$\Rightarrow B \cdot (v dt \times dx) \text{ は 面の法線方向から出ていく磁束}$$

$$B \cdot n \, dS \quad \leftarrow \text{磁束}$$

* 閉曲面を考える

$\hookrightarrow$ 時刻 t の回路 と 時刻 $t+dt$ の回路 と 回路の移動面



$$\int_{\text{閉曲面}} B \cdot n \, dS = \int_{\text{体積}} \nabla \cdot B \, dV = 0$$

↑
ガウスの定理

磁荷なし

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} &= \int_t d\mathbf{s} \cdot \mathbf{E} + \int_{t+dt} d\mathbf{s} \cdot \mathbf{E} + \int_{\text{移動面}} d\mathbf{s} \cdot \mathbf{E} \\ &= \phi(t) - \phi(t+dt) + \int d\mathbf{s} \cdot \mathbf{B} \cdot (\mathbf{v} dt \times d\mathbf{x}) \end{aligned}$$

$$\int d\mathbf{s} \cdot \mathbf{B} \cdot (\mathbf{v} dt \times d\mathbf{x}) = \phi(t+dt) - \phi(t)$$

だから

$$V = -(\phi(t+dt) - \phi(t))/dt = -\frac{d}{dt}\phi(t)$$

閉回路の磁場中での運動 $\Rightarrow$ 起電力

"閉回路を以て磁場の変化" でも実験的に同じ...とある

(ファラデーの法則)



"電磁誘導"

動的な効果
静電場の方程式の拡張

磁束の時間変化が誘導電場を起す。

$$V = \int_{\text{閉回路}} \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{x} = -\frac{d}{dt} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} d\mathbf{s}$$

|| ストークの定理

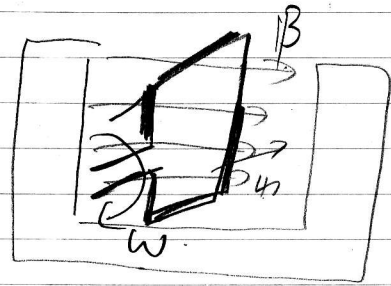
$$\int (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{E} d\mathbf{s}$$

$$\int \mathbf{E} \cdot \left(-\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}\right) d\mathbf{s}$$

$$\Rightarrow \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}$$

例 交流発電機の原理 $\Rightarrow$ 練習 3.1-1

面積 S の長方形の回路を
磁場中で一定の角速度 ω で回転



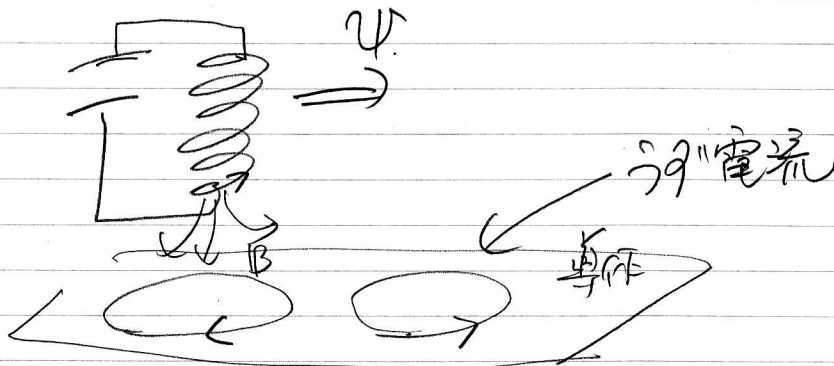
$$\Phi = \int dS \mathbf{n} \cdot \mathbf{B}$$

$$= BS \cos \omega t$$

$$V = - \frac{d\Phi}{dt} = BS\omega \sin \omega t$$

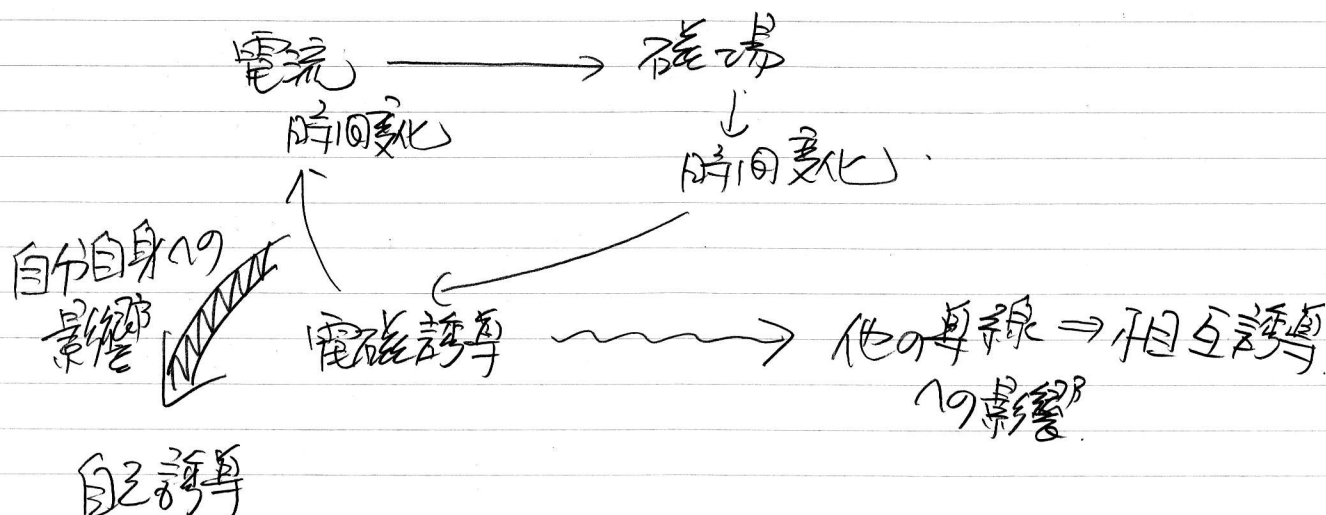
誘起電圧

例 導体の誘起電流 $\Rightarrow$ 練習 3.1-3



例 パイプ中を落下する磁石

5-2 インダクタンス



④ 自己インダクタンス -- コイルの自己誘導



・ 単位長さあたりの巻き数: n

・ コイルのつくる磁場の大きさ: $B = \mu_0 n I$

・ コイル1巻き分の磁束

$$\Phi_1 = \int dS \cdot B = BS = \mu_0 n S I$$

・ コイル全体では n 巻きある

$$\begin{aligned} \Phi_{tot} &= n \Phi_1 = n \mu_0 n S I \\ &= L I \end{aligned}$$

$$L = n^2 l \mu_0 S \quad \text{自己インダクタンス}$$

コイルの特性

回路の起電力 $V = - \frac{d\Phi}{dt} = -L \frac{dI}{dt}$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dI}{dt} > 0 &\Rightarrow V < 0 \\ \frac{dI}{dt} < 0 &\Rightarrow V > 0 \end{aligned} \right\} \text{自己誘導は常に電流の変化と反対向き向きになる}$$

コンデンサの電容量 C

5-3 マクスウェルの変位電流と マクスウェルの方程式

④ アンペールの法則: 再考

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$$

静磁場の法則

両辺に $\nabla \cdot$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{J} = \mu_0 \left(-\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)$$

〇
いつでも

↑
連続の方程式

↑
一般の非定常電流
ではゼロでない

$$\text{左辺} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, t) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{E})$$

↑
ガウスの法則

$$= -\mu_0 \epsilon_0 \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = \nabla \cdot \left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$$

$$\mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2}$$

この項と $\mathbf{J}$ が同じ次元で常に成立する

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

マクスウェルの変位電流

マクスウェル-アンペールの法則

↑ (静磁場のアンペールの法則 + 電荷の保存)
連続の式

非定常電流への拡張

See 3.1-5
3.1-4

まとめ

時間変化も含めて電磁場 $\vec{E}(x,t)$ と $\vec{B}(x,t)$ の満たす方程式

$$\textcircled{1} \quad \nabla \cdot \vec{E}(x,t) = \frac{\rho(x,t)}{\epsilon_0} \quad \text{ガウスの法則}$$

$$\textcircled{2} \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \quad \text{ファラデーの法則}$$

$$\textcircled{3} \quad \nabla \times \vec{B}(x,t) = 0 \quad \text{磁石のみ、法則}$$

$$\textcircled{4} \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \quad \text{マクスウェル-アンペールの法則}$$

これからマクスウェル方程式と導かれる

② $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ から

$$\vec{A} = \oint \vec{E} + \oint \vec{v} \times \vec{B}$$

② 運動方程式

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d}{dt} \vec{v}$$