第三回電磁気学レポート問題 解答例

福島孝治 (東大院総合文化)

問題 1

この問題は導体ではないので、その点について混乱があったかもしれない．ここでは電荷は球全体に一様分布している．

まずは，対称性の考察をしてみる．球全体に一様に分布しているので，電荷分布は球対称である．どの方向から見ても同じようにみえるわけである．それゆえに，電場も球対称であり，電場は**動径成分** $E_r(\boldsymbol{r})$[1] **しかない**．また，球の中心を原点として，そこからの距離にしか依存しないので，$E_r(r)$ とする．

いま，閉曲面として，同心の半径 r の球を考える．その球面上では電場はどこでも法線方向，すなわち球面と**垂直方向**であり，大きさは一定である．そこで，ガウスの法則を当てはめてみる．左辺は,

$$\int_{\text{半径 } r \text{ の球面}} dS \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{E} = \int_{\text{半径 } r \text{ の球面}} dS E_r = E_r 4\pi r^2$$

となる．一方で右辺は，電荷密度を ρ として,

$$\int_{\text{球}} dV \frac{\rho}{\epsilon_0} = \begin{cases} \frac{4\pi\rho}{3\epsilon_0} r^3 & \text{for} \quad r < a \\ \frac{4\pi\rho}{3\epsilon_0} a^3 & \text{for} \quad r \geq a \end{cases}$$

となる．まとめると，電場は動径成分しかなく，原点からの距離 r の関数として,

$$E_r(r) = \begin{cases} \frac{\rho}{3\epsilon_0} r & \text{for} \quad r < a \\ \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 r^2} & \text{for} \quad r \geq a \end{cases} \tag{1}$$

である．総電荷量を q とすれば，$q = 4\pi\rho a^3/3$ なので，これは,

$$E_r(r) = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{a^3} & \text{for} \quad r < a \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & \text{for} \quad r \geq a \end{cases} \tag{2}$$

と表すこともできる．これは，球の外側の電場は，あたかも全電荷が原点に集結しているように見える．

電位は電場を積分すればよい．電位も電場と同様に球対称な関数であるので，距離 r の関数として求める．まずは，$r \geq a$ の時は,

$$\phi(r) \equiv -\int^{\boldsymbol{r}} d\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{E} = -\int_{\infty}^{r} dr' E_r = -\int_{\infty}^{r} dr' \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 r'^2} = \left. \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 r'} \right|_{\infty}^{r} = \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 r}$$

となり，$r \leq a$ のときは，その続きを積分すればよい．

$$\phi(r) = \phi(a) - \int_a^r dr' E_r(r') = \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 a} - \int_a^r dr' \frac{\rho}{3\epsilon_0} r' = \frac{\rho a^2}{3\epsilon_0} - \left. \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{r'^2}{2} \right|_a^r = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(\frac{3a^2}{2} - \frac{r^2}{2} \right)$$

[1] これはベクトル場である電場 $\boldsymbol{E}$ の動径成分なのでスカラーである．その成分として，添字 $_r$ をつけた．引数の $\boldsymbol{r}$ は位置ベクトルを表しており，球の中心を原点にとっておく．

まとめると，電位 $\phi(r)$ は，

$$\phi(r) = \begin{cases} \dfrac{\rho a^3}{3\epsilon_0 r} & \text{for} \quad r \geq a \\ \dfrac{\rho}{3\epsilon_0}\left(\dfrac{3a^2}{2} - \dfrac{r^2}{2}\right) & \text{for} \quad r \leq a \end{cases}$$

となる．

電場と電位の大きさのグラフを図 1 に示しておく．

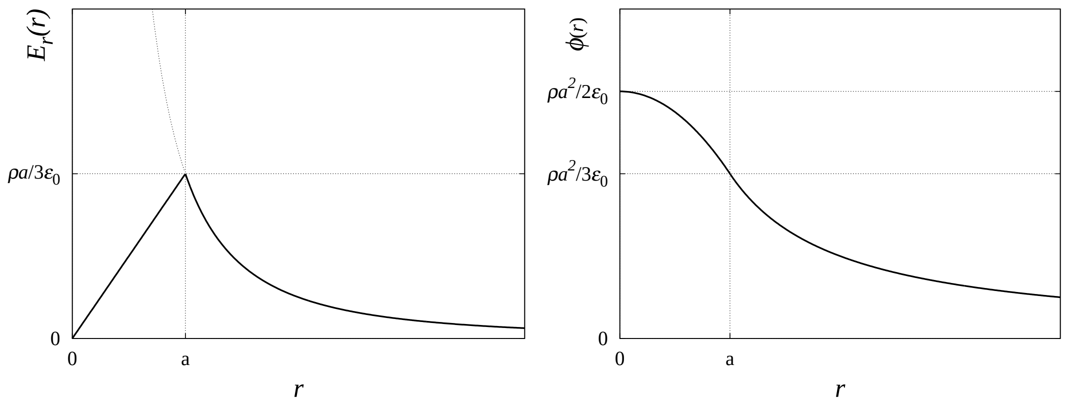


図 1: 電場の動径成分 (左) と電位 (右) の原点からの距離依存性[2].

問題 2

1. 導体の内部には存在できず，導体の表面に集まっている．内側の導体球の表面にある電荷は，導体表面での電場が表面に対して垂直でなくてはならないので，一様に分布している．その電荷分布を感じて，導体球殻の内側の表面には負の電荷が生じるように思われる．対称性からこれも一様に分布しているはずである．どのくらいの電荷が分布しているだろうか．それはガウスの法則を用いることで分かる．導体球殻内部に閉曲面を考えると，導体内部に電場はないことから，$\int dS\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E} = 0$ になる．一方で，球殻の内側の表面に誘起された電荷量を q とすると，ガウスの法則の右辺は，
$$0 = \int_{\text{半径 } r, (b<r<c) \text{ の球}} \frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{Q+q}{\epsilon_0}$$
となり，$q = -Q$ となることがわかる．また，導体球殻全体としては，電荷は 0 であるから，結果として，外側の表面には $-Q = +q$ の電荷が一様に分布していることがわかる．

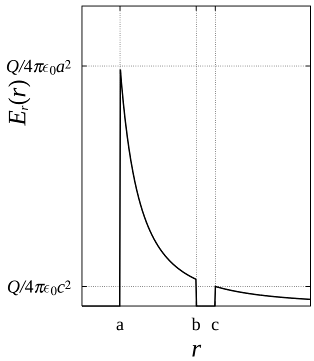
[2] グラフを書くときの一般的な注意事項

1. 縦軸と横軸の意味を書く．
2. スケールが分かるように，代表的な座標を明示する．
3. 曲線の凸凹に注意する，上に凸か下に凸かを間違えないように．

2. 電場を求めてみよう[3]．問題 1 と同様に導体中に電荷は球対称に分布するので，電場の動径成分 E_r だけを考える．導体中に電場は存在しないという導体の性質[4]とガウスの法則を用いて E_r を求めてみる．閉曲面を半径 r の球として，左辺は問題 1 と全く同じだが，右辺は以下のように場合分けられる．

$$\int_{\text{球}} dV \frac{\rho}{\epsilon_0} = \begin{cases} \frac{Q}{\epsilon_0} & \text{for} \quad r \geq c \\ \frac{Q}{\epsilon_0} & \text{for} \quad a \leq r \leq b \end{cases}$$

ただし，$r \leq a$ と $b \leq r \leq c$ は導体の内部なので，$E_r = 0$ である．これより，電場 $\boldsymbol{E}$ は動径成分しかなく，その大きさは，

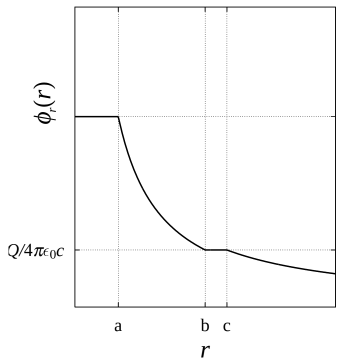


$$E_r = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & \text{for} \quad r \geq c \\ 0 & \text{for} \quad b \leq r \leq c \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & \text{for} \quad a \leq r \leq b \\ 0 & \text{for} \quad r \leq a \end{cases} \tag{3}$$

となる． グラフは左のようになる．

3. 電位は無限遠を基準として，積分すればよい．

$$\phi(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} & \text{for} \quad r \geq c \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 c} & \text{for} \quad b \leq r \leq c \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 c} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b}\right) & \text{for} \quad a \leq r \leq b \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 c} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) & \text{for} \quad r \leq a \end{cases} \tag{4}$$



となる． 導体の内部では電位は一定となっている．

4. さて，導体球の中心が導体球殻のそれからずれた場合についての考察である．上の電荷分布の話しの中で，電荷量の結果は変更されない．つまり，導体球殻の内側の表面には合計で $-Q$ の電荷が誘起されている．この結果は導体球殻の内部に電場がないことからの帰結である．また，その結果として，導体球殻の外側表面に Q の電荷が分布するわけだが，これも一様に分布する．そうでなければ，表面電場が面に垂直ではなくなるからだ．つまり，導体球殻の外側から見れば，内部の導体球がどこにいても全く関係ないわけである．中で何が起こっても，外に影響を与えないということは，静電遮蔽と同じである．導体球殻の内側はもちろん導体球の位置に依存して，電荷分布は変化するし，その内側の電場も変わる．定性的には導体球が近づいた方の内面により多くの電荷が分布することになる．

[3]「導体中に電場がないことを確認せよ」という問題文はヒントだと考えてください．導いた答えを見て，電場がゼロになることに注意しましょう．

[4]講義でも言ったが,「導体中に電場は存在しない」という文章はちょっと抵抗感がある.「平衡状態において」という条件が必要である．

5. 外側の導体球殻に電荷 q が与えられたとき，導体球殻の内側の表面に誘起される電荷 Q には変化はない．導体中に電場がないことから，ガウスの法則より (1) と同じ議論が成り立つ．一方で，球殻全体の電荷は q であるから，外側の表面には電荷の保存則より，$q+Q$ の電荷が一様に分布する．

6. さて，外から見たときの様子は，内部に導体球を持っているボールだけが導体球の電荷分だけ余分の電荷を持っている．それを利用すればよい．手の平に帯電球を隠し持っておいて，それぞれのボールに手をかざせば，当たりのボールだけ，強く引力か斥力が働く．流れる水に近づけると，水が反発することを指摘した学生がいた．電荷量の違いを見るにはそれもよいだろう．

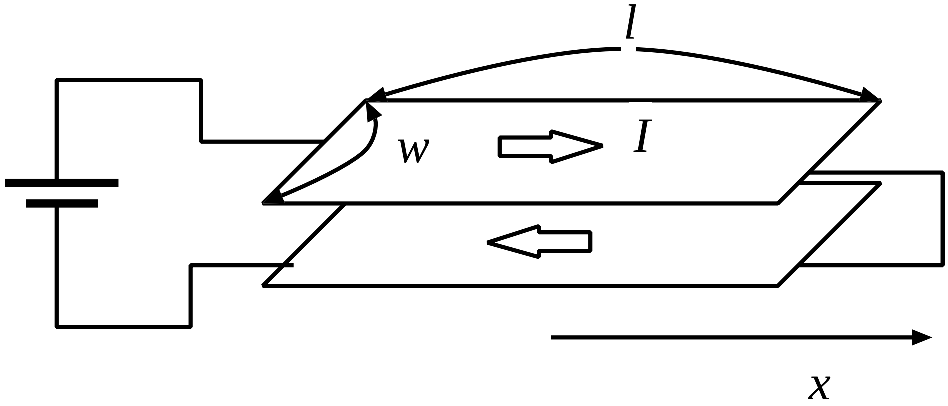
第四回電磁気学レポート問題

福島孝治 (東京大学大学院総合文化研究科)

問題 1 「球形コンデンサー」: 内側に半径 a，その外側に同心の半径 b の球殻からなる球形のコンデンサーを考える. このコンデンサーの電気容量を求めよ. また，内側に電荷 q を，外側に $-q$ をあたえたときの静電エネルギーを求めよ.

問題 2 「アンペールの法則の応用例」:

図のように軸方向に十分長い平行平板コンデンサー (間隔 d、幅 w、長さ l) に電池を接続した回路を考える． 電流は平板を x 軸と平行に一様に流れるものとする．この電流の作る磁場をアンペールの法則を用いて求めよ．コンデンサーの平板の間や外側の両方について考察し，解答だけでなく，その考え方，思考過程も説明せよ．ただし，コンデンサーの幅と長さは十分大きく，またコンデンサーの間隔 d は十分小さく，端の影響は無視できるものとする小さいものとする．



問題 3 「講義について」: 本講義に関する感想や意見・要望があれば述べよ.

締め切りは二週間後。１６号館２２１Ａ室の部屋の前まで。