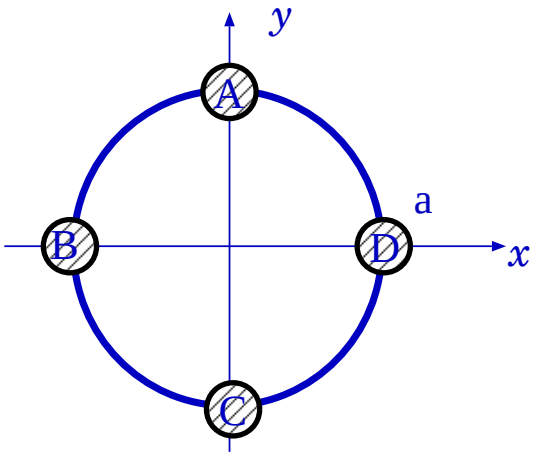
第一回電磁気学レポート問題解答例

問題 1

電場をベクトルとして考える習慣になれることが，この問題の趣旨である．

1．つりあいの位置:

直観的には正四角形に並べるのがよさそうに思う．実際に正四角形の頂点の位置に電荷を置いて，それらのクーロン力の合力を求めてみると，少なくとも接線方向には力はつりあうことは以下のように示される．



四つの電荷のうちの一つの座標を y 軸上に座標 $(0, a)$ 置く．この電荷が静止するためには，接線方向の力、つまり残りの 3 つから働くクーロン力の合力のうち x 成分がゼロになっていることが必要である．y 成分はリングの拘束力がそれを支えてくれる．図のように A を y 軸上に置いたとすると，残りの B,C, D の位置をそれぞれ，(x_B, y_B), (x_C, y_C), (x_D, y_D) とする．もちろん，リング上にあるので，$x_B^2 + y_B^2 = x_C^2 + y_C^2 = x_D^2 + y_D^2 = a^2$ である．このとき，A に働く力の x 成分 F_x^A は,

$$F_x^A = \frac{(-q)^2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{-x_B}{(x_B^2 + (y_B - a)^2)^{3/2}} + \frac{-x_C}{(x_C^2 + (y_C - a)^2)^{3/2}} + \frac{-x_D}{(x_D^2 + (y_D - a)^2)^{3/2}}\right)$$

となり，これが 0 になる条件を求める．まず、C は A と点対称な位置 $(0, -a)$ におくと，$x_C = 0$ であり，C からの寄与はゼロになる．B と D は $y_B = y_D$ であれば，$F_x^A = 0$ となり，これが A の静止条件となる．一方で，B, C, D も静止する必要があるので，同じ議論をすれば，B から見たとき, D が点対称の位置にあり，A, C が互いに線 BD に対称に配置すればよい．このとき、4 つの電荷は図のように配置することになる．結局，全てが等距離になり，xy 軸上にあるときに接線方向の力はつりあうことがわかる．

2．中心部分の電場：

電荷は正四角形に並ぶことがわかったので，それらの 3 つの電荷が原点に作る電場はそれぞれの電場を重ね合わせればよい．答えは、$\boldsymbol{F}_{\text{原点}} = (0, 0)$ である。

3．電荷の位置推定:

ちょうど中心の位置では，電場は釣り合いゼロになるために，電荷を持っていても，力は働かない．ただし，1．の考察より、この配置の元では、y 軸上では電場の x 成分はゼロであることがわかる．つまり，原点に電荷をもってきて、y 軸方向に少し手を伸ばすときに，横方向 (x 方向) に力が働かず，特別な軸になっている．B, D が存在する x 軸方向もこの意味で特別な軸になっている．これを計測すればよい．例えば、棒に電荷を吊り下げて、棒を xy 面内に伸ばせば，電荷が棒の向きに引っ張られる方向に 4 つの電荷のどれかがあることになる．

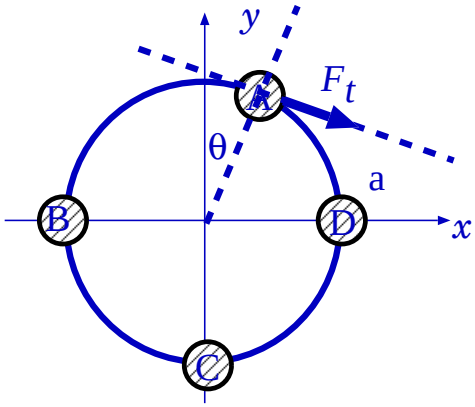
4．釣り合いの位置からずらしたとき:

釣り合いの位置は具体的には，問題図に従うと $B(-a, 0)$，$C(0, -a)$ と $D(a, 0)$ である．δ を正として，A の位置を $\mathrm{B}(\delta, \sqrt{a^2 - \delta^2})$ とおく．

まず、距離 AB, AC, AD を $O(\delta)$ まで求めておくと、

$$
\begin{aligned}
AB^2 &= (\delta+a)^2+a^2-\delta^2 = 2a^2+2a\delta \\
AC^2 &= \delta^2+(\sqrt{a^2-\delta^2}+a)^2 \simeq 4a^2 \\
AD^2 &= 2a^2-2a\delta
\end{aligned}
$$

である。



原点から見た A の位置ベクトルと y 軸のなす角を θ とすると、

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{a^2-\delta^2}}{a} \sim 1, \quad \sin\theta = \frac{\delta}{a}$$

である。A に働く力を $\boldsymbol{F} = (F_x, F_y)$ とすると、力の接線成分 F_t は、

$$F_t = F_x\cos\theta - F_y\sin\theta \simeq F_x - F_y\frac{\delta}{a}$$

となる。力の法線成分はリングの束縛力と釣り合うので A の運動には関係ない。

だから、F_x は $O(\delta)$ まで、F_y は $O(\delta^0)$ まで求めると、ずれ δ の最初の効果がわかる。

$$
\begin{aligned}
F_x^A(\delta) &\simeq \frac{(-q)^2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{\delta-(-a)}{(2a^2+2a\delta)^{3/2}}+\frac{\delta-0}{(4a^2)^{3/2}}+\frac{\delta-a}{(2a^2-2a\delta)^{3/2}}\right) \\
&= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{\delta}{8a^3}+\frac{1}{(\sqrt{2}a)^3}\left(\frac{\delta+a}{(1+\frac{\delta}{a})^{3/2}}+\frac{\delta-a}{(1-\frac{\delta}{a})^{3/2}}\right)\right) \\
&\simeq \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{\delta}{8a^3}+\frac{1}{(\sqrt{2}a)^3}\left((\delta+a)(1-\frac{3\delta}{2a})+(\delta-a)(1+\frac{3\delta}{2a})\right)\right) \\
&= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{\delta}{8a^3}+\frac{-\delta}{(\sqrt{2}a)^3}\right) = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{(1-2\sqrt{2})\delta}{a^3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_y^A(\delta) &= \frac{(-q)^2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{\sqrt{a^2-\delta^2}-0}{(2a^2+2a\delta)^{3/2}}+\frac{\sqrt{a^2-\delta^2}-(-a)}{(4a^2)^{3/2}}+\frac{\sqrt{a^2-\delta^2}-0}{(2a^2-2a\delta)^{3/2}}\right) \\
&\simeq \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{(\sqrt{2}a)^3}\left(\frac{a}{(1+\frac{\delta}{a})^{3/2}}+\frac{a}{(1-\frac{\delta}{a})^{3/2}}\right)\right) \\
&\simeq \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{\sqrt{2}a^2}\right) = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1+2\sqrt{2}}{a^2}
\end{aligned}
$$

まとめると、

$$F_t = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{\delta}{a^3}\left((1-2\sqrt{2})-(1+2\sqrt{2})\right) = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{\delta}{a^3}4\sqrt{2} = -k\delta$$

となる。ここで k はバネ定数とみなせる。つまり、接線方向の力は引き戻すバネの力と同じになることがわかり、釣り合いの位置のまわりに振動運動することがわかる。半径 a が大きくなるとバネ定数は小さくなるので、復元力は弱くなる。直感的にも正しい。

問題 2:「ベクトル演算の練習」

これは具体的にベクトル場の演算を計算する練習である．順に示していく．

2-1. ベクトルの成分をそれぞれ $\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z)$，$\boldsymbol{B} = (B_x, B_y, B_z)$ として，左辺から計算すると，

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (A_y B_z - A_z B_y, A_z B_x - A_x B_z, A_x B_y - A_y B_x) \\
&= \frac{\partial A_y}{\partial x} B_z + A_y \frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial A_z}{\partial x} B_y - A_z \frac{\partial B_y}{\partial x} + \frac{\partial A_z}{\partial y} B_x + A_z \frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{\partial A_x}{\partial y} B_z - A_x \frac{\partial B_z}{\partial y} \\
&\quad + \frac{\partial A_x}{\partial z} B_y + A_x \frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{\partial A_y}{\partial z} B_x - A_y \frac{\partial B_x}{\partial z} \\
&= B_x \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + B_y \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + B_z \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \\
&\quad - A_x \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}\right) + A_y \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}\right) + A_z \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right) = \text{右辺}
\end{aligned}
$$

となり，恒等式を示すことができる．注意すべきは，ナブラは普通のベクトルではなく，微分演算子であることである．

2-2. これは偏微分の練習問題である．定義に従って計算する．

$$
\begin{aligned}
A_x &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{-\frac{1}{2} 2x (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}}{x^2 + y^2 + z^2} = -\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\
A_y &= \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = -\frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\
A_z &= \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = -\frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}
\end{aligned}
$$

$\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ としたときに、このベクトル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ はまとめると、

$$
\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \frac{\boldsymbol{r}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}
$$

となり、クーロンの電場と同じ形をしている．

問題 3 これは演習問題にまとめる予定である．個別の対応はそれぞれに返答することにして，興味深い解答はどこかで公表することにする．