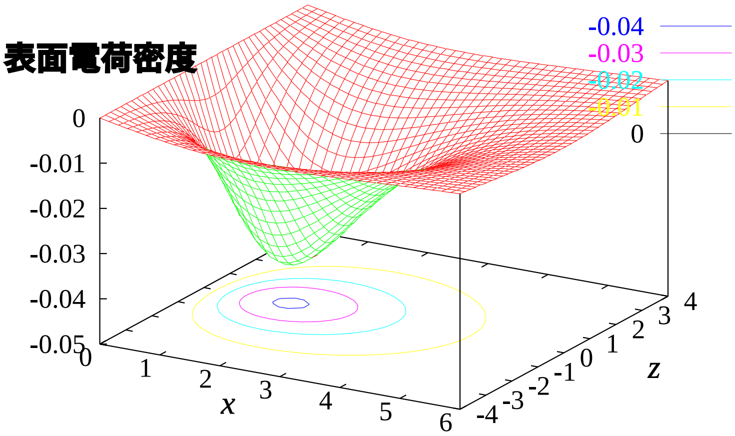


図 8: 点電荷を $(1,2,0)$ に置いた場合の $y=0$ 平面上に誘起される表面電荷分布とその等高線。縦軸のスケールは適当に決めた。

電荷がある場合は、誘起電荷を与える**項**はその点電荷から来ていた。今回の場合、平面は $y=0$ と $z=0$ の 2 つに分けられるが、$\sigma_{y=0}$ にも $\sigma_{z=0}$ にも全ての点電荷の項が入っている。それぞれ独立に計算 (できたと) すると $-q/2$ づつ分配されて出てくるのだろうか。

まず、$y=0$ 平面に誘起される全電荷 $q_{y=0}$ は、

$$
\begin{aligned}
q_{y=0} &= \int_0^\infty dx \int_{-\infty}^\infty dz \sigma_{y=0} \\
&= \frac{-qa}{2\pi} \int_0^\infty dx \int_{-\infty}^\infty dz \left(\frac{1}{((x-b)^2+a^2+z^2)^{3/2}} - \frac{1}{((x+b)^2+a^2+z^2)^{3/2}} \right)
\end{aligned}
$$

この積分は少し難しいが，次のようになる．被積分関数の x 依存性だけがちがうのが気持ち悪いので、$x \pm b \to x'$ 変数変換すると、測度は不変で積分領域がずれる。

$$
\begin{aligned}
q_{y=0} &= \frac{-qa}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty dz \left(\int_{-b}^\infty dx - \int_b^\infty dx \right) \frac{1}{(x^2+a^2+z^2)^{3/2}} \\
&= \frac{-qa}{\pi} \int_0^\infty dz \int_{-b}^b dx \frac{1}{(x^2+a^2+z^2)^{3/2}} \\
&\downarrow \quad z \text{ について積分} \int dz \frac{1}{(A^2+z^2)^{3/2}} = \frac{z}{A^2(z^2+A^2)} \\
&= \frac{-qa}{\pi} \int_{-b}^b dx \left[\frac{z}{(x^2+a^2)(z^2+x^2+a^2)^{1/2}} \right]_0^\infty \\
&= \frac{-qa}{\pi} \int_{-b}^b dx \frac{1}{x^2+a^2} \\
&\downarrow \quad x = a\tan\theta, dx = a\frac{1}{\cos^2\theta} d\theta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{-qa}{\pi}\int_{\arctan(-b/a)}^{\arctan(b/a)} d\theta a \frac{1}{\cos^2\theta}\frac{1}{a^2(1+\tan^2\theta)} \\
&= -\frac{q}{\pi}\left(\arctan(b/a)-\arctan(-b/a)\right) = -\frac{2q}{\pi}\arctan(b/a) \qquad (39)
\end{aligned}
$$

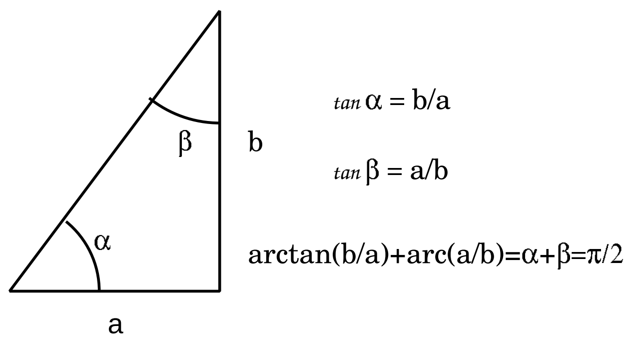
$x=0$ 平面についても同様な計算から、

$$
q_{x=0} = -\frac{2q}{\pi}\arctan(a/b) \qquad (40)
$$

となり、全誘起電荷 q_{tot} は、

$$
\begin{aligned}
q_{tot} &= -\frac{2q}{\pi}\left(\arctan(b/a)+\arctan(a/b)\right) \\
&\downarrow \ \arctan(b/a)+\arctan(a/b) = \frac{\pi}{2} \\
&= -q \qquad (41)
\end{aligned}
$$

これで誘起電荷が鏡映電荷の合計に等しいことが示された．最後の arctan の関係式はなかなか気づきにくいが、図で描くと良く分かる．
先程の電荷の分配の疑問だが、上記のように点電荷の位置のずれに反映して 2 つの平面に移る電荷の大きさが変わって来る。ちょうど位置が $\boldsymbol{r_1} = (a,a,0)$ のときに $-q/2$ づつに分かれている。



1.4　コンデンサーと電気容量

1.4–1 [**球殻導体のコンデンサー容量**]:半径 a と $b(>a)$ の二つの導体球にそれぞれ $\pm Q$ の電荷を与えたとすると，それらの球殻の間の電場は放射線状で、その大きさ E_r は原点からの距離 r のときに $E_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ である．したがって，球殻導体間の電位差は,

$$
\phi_a - \phi_b = \int_A^B d\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{E} = \int_a^b drEr = \int_a^b dr\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)
$$

である．比例係数から電気容量は,

$$
C = \frac{Q}{\phi_a-\phi_b} = 4\pi\epsilon_0\frac{1}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}
$$

となる．

関連する問題:地球の静電容量： 地球を大きな導体と考えるとその電気容量はどの位だろうか．半径 a の球導体に電荷量 q を与えれば，その電位は無限遠を基準として，$\phi = q/4\pi\epsilon_0 a$ である．この場合の静電容量は，$C = q/\phi = 4\pi\epsilon_0 a$ であり、$a = 6400\mathrm{Km}$ を代入すると，$C = 4 \times 3.14 \times 8.85 \times 10^{-12} \times 6.4 \times 10^6 \simeq 7.1 \times 10^{-4}[F]$ である．例えば，1C の電気量を貯めるのに，1400V もかかってしまう．そこら辺の小さなコンデンサーでも数十 μF 程度あるのを考えると，ちょっと地球に電荷を貯めるのは効率悪そうである．

1.4–2 [**コンデンサーの合成**]:

(a) まず C_2 と C_3 は並列なので，合成容量は $C_2 + C_3 = 6\mu F$ となり，C_1 との直列接続から，合計電気容量は，

$$C_{tot} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2+C_3}} = \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}}\mu F = 2\mu F$$

となる．

(b) 全体に貯まる電荷量とコンデンサー C_1 に貯まる電荷量が同じであることから M での電位を求める．AM 間の電位差を V_{AM} とすると，

$$V_{AM} \times 3\mu F = 200V \times 2\mu F \quad \Longrightarrow V_{AM} = \frac{400}{3}V$$

となる．A の位置の電位を 0 とすると，位置 M の電位は $\dfrac{400}{3}$ V となる．

(c) C_1 の電荷量は，$3\mu F \times \frac{400}{3}V \simeq 4.0 \times 10^{-4}C$
C_2 の電荷量は，$2\mu F \times (200 - \frac{400}{3})V \simeq= 1.3 \times 10^{-4}C$
C_3 の電荷量は，$4\mu F \times (200 - \frac{400}{3})V \simeq= 2.7 \times 10^{-4}C$

1.4–3 [**コンデンサーをつないだとき…**]:

この問題の趣旨は，導体コンデンサーの性質を通じて，電位と電荷の動きを理解することがである．ここでは **1.3-5** の問題を一般的にして，コンデンサーの形状によらない議論をする．

まず，静電容量が C_1 と C_2 のコンデンサーの接続前の電荷量をそれぞれ Q_1，Q_2 とする．接続後にそれらは Q_1' と Q_2' に変化したとする．電荷の保存より，$Q_1 + Q_2 = Q_1' + Q_2'$ であり，電荷の移動量を Δ とすると，それを用いて $Q_1' = Q_1 - \Delta$，$Q_2' = Q_2 + \Delta$ と表せる．ここで Δ はコンデンサー 1 から 2 への電荷の移動を正の方向としている．

接続後は，2 つの導体は 1 つの導体になりことから，電位は一定になる．その電位を ϕ' は，接続後の電荷量と容量を用いて，

$$\phi' = \frac{Q_1'}{C_1} = \frac{Q_1 - \Delta}{C_1} = \phi_1 - \frac{\Delta}{C_1} = \frac{Q_2'}{C_2} = \frac{Q_2 + \Delta}{C_2} = \phi_2 + \frac{\Delta}{C_2}$$

と表せる．この式を Δ について解けば，

$$\Delta = (\phi_1 - \phi_2) / \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) = \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} (\phi_1 - \phi_2)$$

となる．$\phi_1 \geqslant \phi_2$ の場合は，$\Delta \geqslant 0$ となり，電荷は 1 から 2 へ移動し，逆に $\phi_1 \leqslant \phi_2$ の場合は 2 から 1 へ移動する．いずれの場合も，**電位の高い方から低い方へ電荷は移動している**ことがわかる．

また，その時の電位は，

$$\phi' = \phi_1 - \frac{\Delta}{C_1} = \phi_1 - \frac{C_2}{C_1 + C_2} (\phi_1 - \phi_2) = \frac{C_1 \phi_1 + C_2 \phi_2}{C_1 + C_2}$$

である．

さて，この導体の静電エネルギーを考えてみよう．電荷を Q，電位を ϕ としたときに，静電エネルギーは $\frac{1}{2} Q \phi$ で与えられる．この問題の 2 つの導体の接続前後でのエネルギーを計算してみる．接続前は，

$$E_{\text{前}} = \frac{1}{2} Q_1 \phi_1 + \frac{1}{2} Q_2 \phi_2 = \frac{1}{2} \left(C_1 \phi_1^2 + C_2 \phi_2^2 \right)$$

であり，一方で接続後のエネルギーは，

$$E_{\text{後}} = \frac{1}{2} (Q_1 + Q_2) \phi' = \frac{1}{2} (Q_1 + Q_2) \frac{C_1 \phi_1 + C_2 \phi_2}{C_1 + C_2} = \frac{1}{2} \frac{(C_1 \phi_1 + C_2 \phi_2)^2}{C_1 + C_2}$$

である．その差を計算してみると，

$$E_{\text{後}} - E_{\text{前}} = \frac{1}{2} \left(\frac{(C_1 \phi_1 + C_2 \phi_2)^2}{C_1 + C_2} - C_1 \phi_1^2 - C_2 \phi_2^2 \right) = -\frac{1}{2} \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} (\phi_1 - \phi_2)^2$$

である．その差を計算してみると，

$$E_{\text{後}} - E_{\text{前}} = \frac{1}{2} \left(\frac{(C_1 \phi_1 + C_2 \phi_2)^2}{C_1 + C_2} - C_1 \phi_1^2 - C_2 \phi_2^2 \right) = -\frac{1}{2} \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} (\phi_1 - \phi_2)^2$$

となる．つまり，**接続後のエネルギーはいつでも減る**ことがわかった．エネルギーが下がらない場合は，接続前の電位差が無い場合で，その時は電荷は移動しない．

1.4–4 [**コンデンサーのエネルギー**]:

電気容量が C_1 のコンデンサーに q_1 の電荷を与えたときの電位は $\phi_1 = q_1 / C_1$ である．導体の電位は一定であり、そこに電荷 q_1 があるのでコンデンサーのエネルギーは，$\frac{1}{2} q_1 \phi_1 = \frac{1}{2} q_1^2 / C_1$ である．したがって，二つのコンデンサーの接続前のエネルギーの合計は，$E_b = \frac{1}{2} \left(q_1^2 / C_1 + q_2^2 / C_2 \right)$ である．一方で，並列に接続した後の電気容量は，$C_1 + C_2$ であり，そこに $q_1 + q_2$ の電荷が貯るわけだから，エネルギーは，$E_a = \frac{1}{2} (q_1 + q_2)^2 / (C_1 + C_2)$ である．この差は，

$$E_a - E_b < 0$$

であることがわかる．これは前問と同じである．

1.4–5 [コンデンサー]:

(a) 導体板は非常に大きいと簡単化したので，一様な面密度 $\sigma = \frac{q}{S}$ で帯電した無限に広い平板の作る電場を考えればよい．この電場は平板に垂直方向のみ成分を持ち，平板から離れる方向で，その大きさは $|\boldsymbol{E}| = \dfrac{\sigma}{2\epsilon_0} = \dfrac{q}{2\epsilon_0 S}$ である．

(b) 導体板 B も同様に考えると，今度は電荷の符号が負なので，平板に向かう方向で，やはりその大きさは $|\boldsymbol{E}| = \dfrac{q}{2\epsilon_0 S}$ である．この二つの電場を方向に注意して重ね合わせると，導体板の間での合計の電場は導体板 A から B に向かう方向に大きさ $|\boldsymbol{E}| = \dfrac{q}{\epsilon_0 S}$ を持つことがわかる．ちなみに，導体板の外側は方向が逆向きになっており，$\mathbf{0}$ になる．

(c) 二枚の導体板間の電位差 ϕ_{AB} を求めてみる．導体板間の電場は導体板に垂直で場所に依らず一定の値 $\dfrac{q}{\epsilon_0 S}$ であることから，

$$\phi_{AB} = \int_A^B d\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{E} = \int_0^d dz \frac{q}{\epsilon_0 S} = \frac{qd}{\epsilon_0 S}$$

であることがわかる．ここから, 電位差 ϕ_{AB} と電荷量 q は比例関係にあることがわかり，その比例係数として，電気容量 C は,

$$C = \frac{q}{\phi_{AB}} = \epsilon_0 \frac{S}{d}$$

となることがわかる．コンデンサーの電気容量を大きくするためには，面積 S を大きく，距離 d を小さくすればよいことがわかる．

(d) このコンデンサーに蓄えられたエネルギーは次の二通りの考え方で求めてみる．最初は，電荷が蓄えられていない状態から，導体板 B から+q の電荷を導体板 B に移動するために必要なエネルギーを考える．電荷が既に q' 移動した後に微小な電荷量 dq' を移動するために必要なエネルギー dU は，$dU = \phi_{AB}(q')dq' = \frac{q'd}{\epsilon_0 S}dq'$ である．ゆえに，電荷が q になるまでのエネルギー U は,

$$U = \int dU = \int_0^q \frac{q'd}{\epsilon_0 S} dq' = \frac{d}{\epsilon_0 S}\frac{q^2}{2} = \frac{dq^2}{2\epsilon_0 S}$$

である．

一方，エネルギーは電場のエネルギーと考えることができる．電荷が蓄えられた状態での電場のエネルギーは,

$$U = \frac{\epsilon_0}{2}\int dV |\boldsymbol{E}|^2 = \frac{\epsilon_0}{2}\int dV \left(\frac{q}{\epsilon_0 S}\right)^2 = \frac{\epsilon_0}{2}\left(\frac{q}{\epsilon_0 S}\right)^2 Sd = \frac{q^2 d}{2\epsilon_0 S}$$

となり，同じ結果を得る．

1.4–6 [円柱コンデンサーの電気容量]:

外径 a の円筒型導体 A および内径 $b(>a)$ の導体 B が同心に置かれている場合の静電容量を求めてみる．それぞれに正負同量の電荷を与えると，それらの電荷は A の外側の表面と B の内側面に一様に分布する．この導体系の電場は，円筒導体が無限に長いと考えると，導体と平行な電場は存在しないので，動径方向で中心からの距離 r だけの関数である．そこでガウスの法則より，電場の動径成分 E_r は，電荷の単位長さ辺りの電荷を λ として，$E_r = \lambda/2\pi\epsilon_0 r (a < r < b)$ となる．導体の外側 $r > b$ では電場はゼロになっている[18]．そこで，両導体の電位差は，

$$\phi_A - \phi_B = \int_a^b E_r dr = \int_a^b \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log \frac{b}{a}$$

これより，軸方向の単位長さ当たりの静電容量 C' は

$$C' = \frac{\lambda}{\phi_A - \phi_B} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\log \frac{b}{a}}$$

となる．

1.4–7 [一様帯電球の静電エネルギー]:

ここでも静電エネルギーを二種類の方法で求めてみる．

(1) 静電ポテンシャルからの計算:

半径 a の球になるまで電荷を蓄える時のエネルギーを球殻を付け加える過程にそって計算してみる．まず，半径 r まで電荷が貯ったとする．そのときの電荷 $q(r)$ は，$q(r) = \frac{4\pi r^3 \rho}{3}$ である．この電荷が電荷球の外側につくる電場は，その電荷が中心に集まった点電荷と同じなので，方向は動径方向であり，大きさ E_r は，$E_r = \dfrac{q(r)}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ である．この電場の元で，半径 r の位置の電位は，$\phi = \frac{q(r)}{4\pi\epsilon_0 r}$ であるから，ここに dq の電荷を持ってくるためのポテンシャル・エネルギー dU は，$dU = \phi dq = \frac{q(r)}{4\pi\epsilon_0 r} dq$ である．$dq = \left(\frac{dq}{dr}\right) dr = 4\pi r^2 \rho dr$ であることに注意して，全エネルギーは，

$$U = \int dU = \int \frac{q(r)}{4\pi\epsilon_0 r} dq = \int_0^a dr (4\pi r^2 \rho) \frac{\frac{4\pi r^3 \rho}{3}}{4\pi\epsilon_0 r} = \int dr \frac{4\pi\rho^2 r^4}{3\epsilon_0} = \frac{4\pi\rho^2 a^5}{15\epsilon_0}$$

と求まる．

(2) 電場のエネルギー:

次に，電場のエネルギーとして計算してみる．電場はガウスの法則を用いて，求めておく．電場は動径方向であるので，その大きさを E_r として，半径 r の球をガウスの閉曲面に選ぶと，ガウスの法則より，

$$4\pi r^2 E_r = \begin{cases} \frac{4\pi r^3 \rho}{3\epsilon_0} & \text{for } r < a \\ \frac{4\pi a^3 \rho}{3\epsilon_0} & \text{for } r > a \end{cases}, \quad \Longrightarrow E_r = \begin{cases} \frac{r\rho}{3\epsilon_0} & \text{for } r < a \\ \frac{a^3 \rho}{3\epsilon_0 r^2} & \text{for } r > a \end{cases}$$

[18] なぜ?

となる．これを用いて，全空間での電場のエネルギーは，

$$
\begin{aligned}
U &= \frac{\epsilon_0}{2}\int dV|\boldsymbol{E}|^2 = \frac{\epsilon_0}{2}\int_0^\infty 4\pi r^2 dr E_r^2 = \frac{\epsilon_0}{2}\left(\int_0^a 4\pi r^2 dr\left(\frac{r\rho}{3\epsilon_0}\right)^2 + \int_a^\infty 4\pi r^2 dr\left(\frac{a^3\rho}{3\epsilon_0 r^2}\right)^2\right) \\
&= \frac{2\pi\rho^2}{9\epsilon_0}\left(\int_0^a dr r^4 + \int_a^\infty \frac{a^6}{r^2}\right) = \frac{2\pi\rho^2}{9\epsilon_0}\left(\frac{a^5}{5} + a^5\right) = \frac{2\cdot 6\pi\rho^2 a^5}{9\cdot 5\epsilon_0} = \frac{4\pi\rho^2 a^5}{15\epsilon_0}
\end{aligned}
$$

となり，やはり同じ結果が得られる．

この電荷球の全電荷量を Q とおくと，$Q = \dfrac{4\pi a^3\rho}{3}$ であるので，エネルギーは，

$$
\rho = \frac{3Q}{4\pi a^3}, \quad \Longrightarrow U = \frac{4\pi a^5}{15\epsilon_0}\left(\frac{3Q}{4\pi a^3}\right)^2 = \frac{3Q^2}{20\pi a}
$$

と表すこともできる．

1.4–8 [**平板コンデンサーの静電エネルギー**]**:**

これは **1.4-5** の (d) で答えているので省略する．この問題では電場は定数であるので，特殊な例になっている．