

- (c) ローレンツ力を受けた電荷は導線の端に移動する．その結果生じた電場によって qE と磁場による力とがつり合うまで電荷は移動する．(a) では $qE = qx\omega B$ であるから，電場 E は $E = x\omega B$ であり，中心と両端の電位差は，

$$\phi = \int_{\text{中心}}^{\text{端}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{x} = \int_0^l dx x \omega B = \frac{l^2 \omega B}{2}$$

である．また，(b) では，電場は $E = vB$ であり，電位差は $2lvB$ である．

2.1-2 [直線電流の作る磁場]:

この問題の趣旨は，2つの電流にはそれぞれ力が働くこととその力はビオーサバールの法則とローレンツ力の二段階で理解できることの確認である．

- (a) まず電流が磁場を作り，その磁場を次の電流がローレンツ力を介して感じるという順番で話しを進める²⁰．この最初の設問では一本の電流の作る磁場をまず求める．磁場の方向は，右ネジを巻く方向で，その大きさはアンペールの法則を使って求めることができる．電流に垂直な面上に半径 r の円に沿った磁場の線積分を考えると，その成分 B_ϕ は，

$$\int_{\text{円 } r} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{x} = 2\pi r B_\phi = \mu_0 I_1, \rightarrow B_\phi = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$$

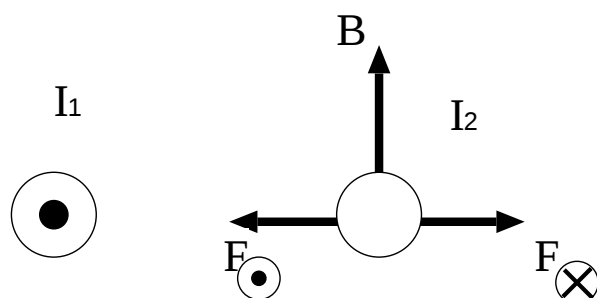
と求まる．

- (b) さて，電流 I_1 の磁場を I_2 が感じる力はローレンツ力で与えられる．

磁場 B 中に電流 (動いている電荷) $I dx (= qv)$ が受ける単位長さ当たりのローレンツ力は $d\mathbf{F} = I dx \times \mathbf{B}$ となり，この問題の場合その大きさは

$$dF_{21} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 dx}{2\pi r}$$

となる．また，左図のように，その向きは I_2 が I_1 と平行の場合は引力に，反平行の場合は斥力になる．この力が作用反作用の法則に従っていることは，逆のプロセスを順に考えて，同じ大きさの逆向きの力が働いていることを示せばよい．確かにそうになっているであろう．



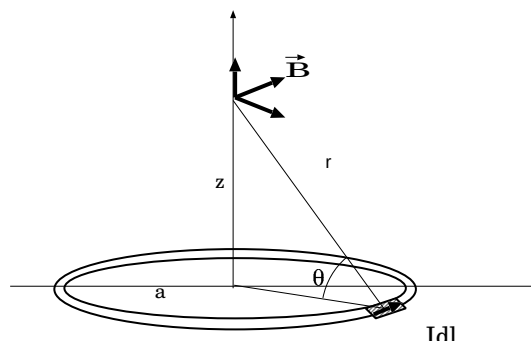
二本の電流を上から見た図． B は電流 I_1 が作った磁場である．

²⁰これは，クーロンの法則から電場の導入した議論と似ている．二つの電荷があったときに，まず一番目の電荷が電場を作り，二番目の電荷がその電場を感じる．さて，引力や斥力のような力の方向は，電荷の負号で決まっていたが，電流の場合はどうだろうか？

- (c) さて，平行と反平行の間はどうなるだろうか． I_1 と I_2 が直角に並べると， B と I_2 が平行になってしまうので，力は働かない．この実験事実はアンペールによって発見され，アンペール力²¹とも呼ばれている．

2.1-3 [円電流による磁場]:

半径 a の円電流 I が中心軸上にて円の中心から z の距離にあるに作る磁場を求める（一般の位置での磁場を求めるのはちょっと難しい．できなくはない．）．対称性から，軸上における B の方向は z 軸方向になる． z 軸に垂直方向は円の軸対称の位置の電流要素が作る磁場と完全にキャンセルする．右図のように，電流要素から観測位置へのベクトルと環状電流の流れている面との角度を θ とし，磁場の z 軸方向の成分を B_z とすると，



$$\begin{aligned} B_z &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{Idl}{r^2} r \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos\theta \\ &\downarrow (\cos\theta = a/r) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{aIdl}{r^3} = \frac{aI\mu_0}{4\pi r^3} \int dl = \frac{\mu_0 I a^2}{2r^3} = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

となる．ここで $r = (a^2 + z^2)^{1/2}$ である．

実は，もう少し計算を進めると，この環状電流の作る磁場が電気双極子モーメント (1.1-8 参照) の作る電場と同じであることが分かる．ここではその一端に振れることにする．環状電流のつくる面積は， $S = \pi a^2$ であり， $a \ll z$ の条件では，

$$\begin{aligned} B_z &\simeq \frac{\mu_0 I S}{2\pi z^3} \\ \mu_0 &\leftrightarrow \frac{1}{\epsilon_0} \\ m &= \frac{S}{2} e_z = \frac{\pi a^2 I}{2} \leftrightarrow p = 2aq e_z. \end{aligned}$$

環状電流と磁気双極子 (小さい磁石) はそれら作る磁場が同じという意味で等価である．電気双極子の場合に正負の電荷が別々に考えられたのと同様に，磁石の素がこの環状電流だとすれば，N 極と S 極はバラバラには取り出せない (気がする) ．

2.1-4 [直線電流の間に働く力 (ビオ - サバールの法則 + ロ - レンツ力)]:

(a), (b) は 2.1-2 と共通であり，そちらを参照のこと．

²¹ たくさんの力が出てきて，混乱の元かも知れないが，これは歴史的な経緯を述べていると考えて欲しい．あくまでも，現代的にはビオ＝サバールの法則による磁場とローレンツ力による解釈が一般的である．

ただし，2.1-2 では，直線電流の作る磁場をアンペールの法則を用いて求めた．ここでは，ビオ＝サバールの法則から求めてみることにする．

直線電流を z 軸上にとることにする．無限に長い直線電流を考えることで z 方向の依存性はないので， $z = 0$ の面上の位置 $(a, 0, 0)$ での磁場を求める．

磁場の方向は y 方向であり，右図に示すように，ある電流要素 Idz に対して， $|Id\mathbf{x} \times \mathbf{r}| = Idzr \sin \theta$ であることに注意して，その電流要素が作る磁場の大きさ (y 成分) dB_y は，

$$dB_y = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{r \sin \theta}{r^3} dz$$

である．ここで， $r = (z^2 + a^2)^{1/2}$ ， $\tan \theta = a/z$ である．

電流要素は $-\infty$ から ∞ まであるので，それについて積分すればよいが，その代わりに角度 θ について， 0 から π まで積分する方が簡単である．

$$r = \frac{a}{\sin \theta}, \quad z = \frac{a}{\tan \theta}, \quad |dz| = \frac{a}{\sin^2 \theta} d\theta$$

より，求める磁場 B_y は，

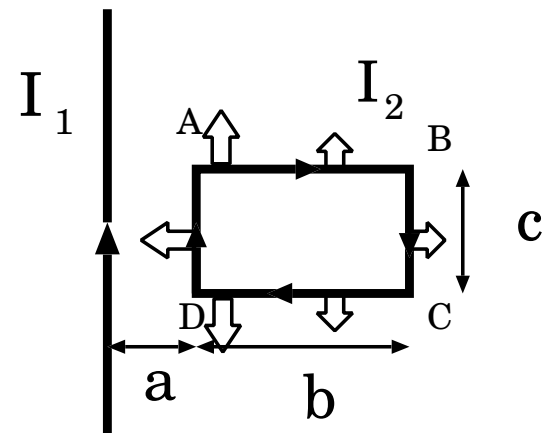
$$B_y = \int dB_y = \int_0^\pi \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\sin^2 \theta}{a^2} \sin \theta \frac{a}{\sin^2 \theta} d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_0^\pi \sin \theta d\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

となる．

(c) 問題文ではループ電流は正方形となっていたが，図では長方形であった．ここでは長方形だと考えて考えてみる．

まずは無限に長い電流 I_1 が矩形電流に及ぼす力を考察する． I_1 が作る磁場は既に前問で求めているので，矩形電流のそれぞれの部分に対して，どのような力が働くかを考える．まず， I_1 に垂直な平行な線分 AB と CD 部分について考える．右図からもわかるとおり，その2つの線分に働く力は互いに逆向きで，かつ直線電流 I_1 から同じ距離にあるので，同じ大きさである．結果として，2つの線分に働く力の合力はゼロになる．

次に平行線分 DA と BC について考えると，それぞれに働く力は，斥力の方向を正として，



矩形電流の各部分に対する力の方向を矢印 (白抜) で記す．矢印の長さが力の大きさを (気持ちで) 表している．

$$F_{DA} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2 c}{2\pi a}, \quad F_{BC} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 c}{2\pi(a+b)}$$

となる．それらの合力は引力であり，その大きさ F_{tot} は，

$$F_{\text{tot}} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 c}{2\pi} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+b} \right)$$

となる．

その逆はどうなるか．つまり，直線電流が矩形電流から受ける力である．この力はやはり作用反作用の法則に従っていて，合力としては上式と同じである．これを直接確かめるのはちょっと難しい．

2.1-5 [アンペールの法則]:

ビオ・サバールの法則で与えられる磁場 B は， $\nabla \times B = \mu_0 J$ を満たす²²．ここで J は電流密度を表す．ある任意の閉曲線に沿って，磁場の線積分を考えると，ストークスの定理を用いることで，

$$\int B \cdot dx = \int dS n \cdot (\nabla \times B) = \mu_0 \int dS n \cdot J = \mu_0 I$$

が分かる． I は閉曲面で囲まれた面で定義される電流である．これをアンペールの法則という．任意の閉曲線に沿って磁場の積分がそこを貫く電流に等しいことを表している．

2.1-6 [円柱電流の作る磁場]:

2.1-2 の導線の太さが a になった問題である．磁場の方向は同じく，電流の向き対して右ねじを巻く向きである．磁場の大きさはアンペールの法則を用いて求める．電流に垂直な面に電流の中心と同心の半径 r の円をアンペールの閉曲線に選ぶ．その円上での磁場の大きさは不変であり，その大きさを B_ϕ とすると，アンペールの法則の左辺は， $\int dx \cdot B = 2\pi r B_\phi$ である．

右辺には注意が必要である．円柱には一様な電流が流れているので，その電流密度は $J = I/\pi a^2$ である．右辺は， r と a の大小関係で場合分けをして，

$$\mu_0 \int dS n \cdot J = \begin{cases} \mu_0 I & \text{for } r > a \\ \mu_0 \frac{I}{\pi a^2} \pi r^2 = \mu_0 \frac{I r^2}{a^2} & \text{for } r \leq a \end{cases}$$

となる．ここから，

$$B_\phi = \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} & (\text{円柱の外側}) \\ \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} & (\text{円柱の内側}) \end{cases}$$

となる．円柱の外側では直線電流の結果と同じとなる²³．

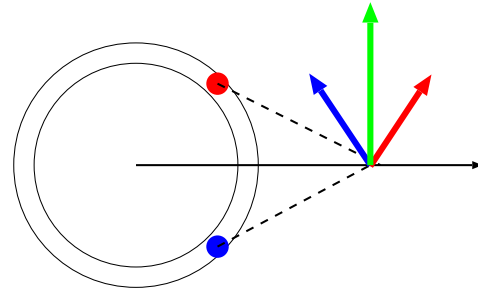
²² 講義ではこの計算を示したが，ここでは省略する．

²³ どこかで見た結果である．

2.1-7 [アンペールの法則の応用例]:

この問題の趣旨はアンペールの法則の応用である．何から何が示されるかを，すぎ間がないように議論して欲しい．

ビオーサバールの法則から，各電流要素から作られる磁場の z 成分はない．よって，電流に垂直な成分しかないが，一方で，右図にあるように動径成分は電流の密度の対称性からキャンセルされる．つまり，磁場は回転成分 B_ϕ しかないことがわかる．しかも，その大きさは原点からの距離だけに依存している．この議論は円筒の外側だけでなく，内側でも成り立つ．その成分を求めるためにアンペールの法則を用いる．



電流分布を真上から見た図．電流分布のある要素がつくる磁場とその電流要素と線対称の位置にある電流要素の作る磁場を重ね合わせると，動径成分はキャンセルする．

アンペールの法則の積分形は，適当な閉曲面に対して

$$\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{x} = \mu_0 \int_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{J}$$

となる．閉曲線として，円筒と同心の半径 r の円を考える²⁴．左辺は， $2\pi r B_\phi$ となり，一方で右辺は r の大きさに依存して決まる．

$$\text{右辺} = \begin{cases} 0 & \text{for } r < a \\ \mu_0 I & \text{for } r \geq a \end{cases}$$

ここで，全電流を I とした．まとめると，磁場は右ねじが回る方向であり，その大きさは，

$$B_\phi = \begin{cases} 0 & \text{for } r < a \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r} & \text{for } r \geq a \end{cases}$$

となる．

2.1-8 [同軸ケーブル]:

- (a) 2.1-7 と同様に考えて，アンペールの法則を当てはめる．磁場は右ねじの方向を正として，その大きさを B_ϕ とすると，半径 r のアンペールの閉曲線を考える．内側の円柱には表面にのみ電流が流れていると仮定するので， $r < a$

²⁴ そうすれば，線積分の線要素との内積は回転成分 B_ϕ だけ考えればよくて，しかも，それは円の半径だけに依存するので，積分は簡単にできる．

には電流は流れていないことに注意すると，アンペールの法則から

$$2\pi r B_\phi = \begin{cases} 0 & \text{for } r < a \\ \mu_0 I & \text{for } a \leq r < b \\ 0 & \text{for } b \leq r \end{cases}$$

を得る．よって，内側と外側の導体の間にだけ磁場 $B_\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ が右ねじの方向にある．

(b) 問題図の斜線部分の面を貫く磁場 (磁束) Φ は，どこでも面に垂直なので，

$$\Phi = \int dS \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = \int_a^b dr \int_0^l dz B_\phi = l \int_a^b dr \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \log \left(\frac{b}{a} \right).$$

となる．

(c) 自己インダクタンス L は電流 I が自分の閉回路を貫く磁場 (磁束) Φ との比例関係の係数を表す．この問題で自己インダクタンスは，

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \log \left(\frac{b}{a} \right).$$

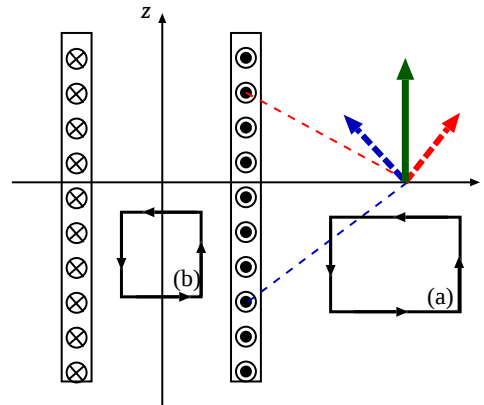
である。

(d) この問題は，3.0-2 で解説する．

2.1-9 [ソレノイドコイル]:

簡単のために無限に長いコイルを考えることにする．無限に長いコイルのときには，磁場は z 軸の位置には依存しない．ちょうど $z = 0$ の面上の位置を考えても一般性を失わない．右図のように， $z = 0$ のある位置に対して， z 座標が $+z$ ， $-z$ にあるソレノイドコイルの 2 つ電流に作る磁場を考える．ビオ・サバールの法則から二つの磁場の大きさは等しく，方向は図に示してある．この二つの磁場ベクトルの合成は $+z$ 方向を向いていることがわかる．つまり， z 座標の任意の位置 $+z$ を流れる電流には必ず対応する座標 $-z$ にある電流が存在し，それが磁場の z 方向以外の成分をキャンセルすることがわかる．

この議論はコイルの内側か外側かに関係がないので，このコイルの作る磁場は必ず z 成分しかないことがわかる．



(a) 図のようにコイルの外側に矩形の閉曲線 (a) を考える．磁場の方向は z 方向しかないので，その大きさを B_z とする． z 軸に垂直な線分に対しては， $d\mathbf{x} \cdot \mathbf{B} = 0$

である．矩形の z 方向の長さを l として，この閉曲線にアンペールの法則を当てはめると，

$$\int d\mathbf{x} \cdot \mathbf{B} = l \left(B_z^{(\text{右})} - B_z^{(\text{左})} \right) = 0$$

となる．ここで右辺がゼロになるのは，閉曲面を貫く電流がゼロであるためである．ここから $B_z^{(\text{右})} = B_z^{(\text{左})}$ である．閉曲線は平行移動しても同じ結果が得られることから，コイルの外部では B_z は位置に依らないことがわかる．また，一方で，ビオ・サバールの法則より無限遠での磁場がゼロであることから，コイルの外部ではどこでもゼロであることがわかる．

- (b) 上の議論から磁場の方向は z 方向である．
- (c) 図のようにコイルの間に閉曲面 (b) を考える．閉回路が電流を囲まない限り，上の (a) での議論は同様に成り立つ．よって，磁場の向きは z 方向であり，コイル内部の場所には依存しない．
- (d) コイルをまたぐように，閉回路を考える．外側の磁場はゼロであることはわかっているので，アンペールの法則から，

$$\int d\mathbf{x} \cdot \mathbf{B} = l B_z = \mu_0 n I$$

より， $B_z = \mu_0 n I$ となる．

- (e) コイルに流れる電流は，平行に同じ向きに流れている電流の集まりだから，お互いに引力が働いている．これは縮む方向である．

これらはコイルの半径には全く依らない結果であった．

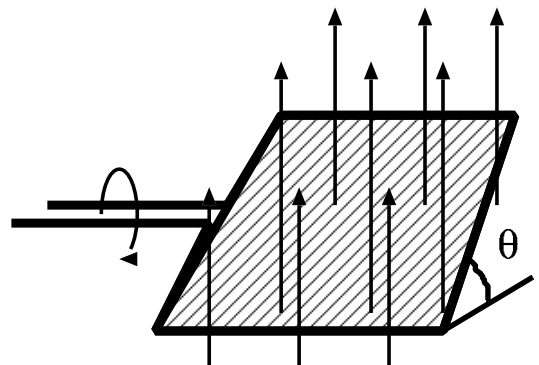
3 電磁誘導と Maxwell 方程式

3.0-1 [交流誘導起電力]:

起電力は回路に一周にわたる電場の線積分で与えられる．電磁誘導による起電力 V は，ファラデーの法則より $V = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{x} = -\frac{d}{dt}\Phi$ である．磁場と閉回路の法線とのなす角を θ のとき，磁束 Φ は， $\Phi = BS \cos \theta$ で表される．一定の角速度 ω で回転しているときは $\theta(t) = \omega t$ となるから，誘導起電力 V は，

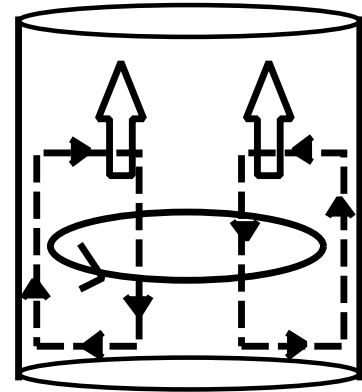
$$V = \omega B S \sin(\omega t)$$

となる．これが交流発電機の原理である．一様な磁場中を閉回路を回転させると，周期的な起電力が発生できる．



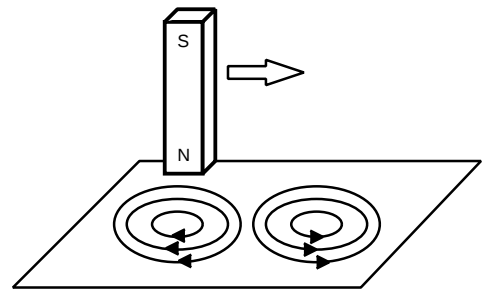
3.0-2 [電磁誘導と表面電流]:

円柱の内部を一様に流れていた電流が、一様に増幅したとする。このとき、円柱内部の磁場は右ねじを巻く方向の増える。この磁場の変化に対して電磁誘導が起こり、このとき磁場の増加を妨げるように右図の点線の向きに誘導起電力が生じる。結果として、円柱の中心部分よりも、表面の方に多くの電流が流れることになる。これは表皮効果と呼ばれる。例えば、交流電流を導線に流すとき、常に電流が振動変化しているので、この効果は顕著に現れる。



3.0-3 [うず電流]:

磁石を動かしたときの、導体板を貫く磁場の変化について考えてみる。磁石を動かすことによって、動かす前のN極の直下では減少し、動かす先では磁場が増えます。電磁誘導の法則から、それぞれに変化を妨げる方向に誘導起電力が生じ、右図のように渦状に電流が流れます。これは渦電流と呼ばれています。



この渦電流が流れているときに、その電荷運動が磁石による磁場から受ける力を考える。ちょうど磁石が通過するところの誘導電流は図の奥から手前に流れている。この電流は磁場から磁石の運動と同じ方向にローレンツ力を受ける。磁石にはその反作用とし、磁石の運動と反対向き、つまり運動を妨げる方向に動く。あるいは、誘導電流の等価磁石を考えると、図の左側ではS極が上に、右ではN極が上になっているので、やはり磁石の運動を妨げる力が働いていることは理解できる。

この導体に働く力はアラゴの円盤と呼ばれる実験に相当している。アラゴの円盤とは、動かさないときには力が働かない、つまり磁性のない銅やアルミの円盤の上を、磁石を動かすと、その磁石に引かれて運動をはじめる現象である。最近では、廃品回収でアルミ缶を分別する方法にこの考え方が使われている。スチール缶は磁石にくっつくのでまず分別し、磁石にくっつかないアルミ缶は磁場中に(例えば)落下させる等の運動をさせて、電磁誘導を利用した力によって分別させる。また、電磁調理器は渦電流を利用している典型例である。

3.0-4 [変位電流]:

コンデンサーに蓄えられた面電荷密度を σ とすると、平板導体間の電場の大きさ E は、 $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ である。平板間の変位電流 I_d は、平板と平行な面を貫く(変位)電

流密度として考え，

$$I_d = \int dS \mathbf{n} \cdot \mathbf{J}_d = \int dS \mathbf{n} \cdot \left(\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = \frac{d}{dt} \int dS \sigma = \frac{d}{dt} (\sigma S)$$

である．コンデンサーに蓄えられて電荷は σS であるから，その時間変化は電流に相当する．つまり，このコンデンサー間には電流が流れていないが，相当する変位電流が流れていることになる．

3.0-5 [アンペール・マクスウェルの法則]:

静磁場でのアンペールの法則 ($\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$) の両辺に $\nabla \cdot$ を作用し，連続の方程式 ($\partial \rho(\mathbf{x}, t) / \partial t = -\nabla \cdot \mathbf{J}$) より，

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{J} = \mu_0 \left(-\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)$$

となる．左辺は恒等的にゼロになるが，右辺では $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ となり，定常電流のときに対応している．一般に，非定常状態のときには左辺のみがゼロになり，この等式は成り立たない．

そこで，ガウスの法則が非定常状態でも成り立つとして， $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0$ の両辺を t で微分すれば，

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{E}) = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial t} \rho = -\frac{1}{\epsilon_0} \nabla \cdot \mathbf{J}$$

より，

$$\nabla \cdot \left(\mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = 0$$

となる．これを用いて，アンペールの法則を非定常状態へ拡張すると，

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$$

が得られる．右辺の第二項を変位電流密度と呼ぶ．もちろん，定常状態では $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0$ であり，アンペールの法則に戻る．