第二回電磁気Bレポート問題 解答例

福島孝治 (東大院総合文化)

問題 1 (練習問題 **1-2.2**)

この問題は，ガウスの法則を使うことによって，電場を計算する練習問題である．まずは無限に広がった場合を考えることにする．この手の問題を考える手順は以下のとおりである[1].

1. 問題の対称性を考えて，存在する電場の成分を見極める．対称性がよい場合というのはいくつかの成分 (x 成分とか y 成分とか) がキャンセルされてゼロになっていることが多い.

2. 都合のよい閉曲面を見付けて，ガウスの法則を当てはめてみる．ここで，都合がよいというのはどういうことだろうか．ガウスの法則は，任意の閉曲面から沸き出した総電場が閉曲面内部の総電荷量に等しいことを言っている．実際に当てはめてみるには，閉曲面からの**わきだし (発散)**，すなわち，電場の閉曲面に対する**法線成分**を面全体に渡って積分しなくてはならない.「都合がよい」というのはこれがサボれるという意味である．つまり，閉曲面の電場の法線成分がどこでも同じであるか，電場と面の法線ベクトルが垂直になっていてゼロであると、「都合良く」計算できるわけである.

対称性の考察

まず，並進操作に対して不変性がある．ちょっと格好付けて難しい言葉を使ってみたが，内容は大したことはない．平面に平行な方向に対してはどこも特別な点はない．このことから，電場は平面からの距離だけにしか依らないことがわかる．そこで，適当な場所に z 軸を設定し，その軸上での電場を求めることは一般性を失わない．右図から平面に平行の方向は必ずキャンセルされ，垂直な成分 E_z しか存在しないことがわかる.

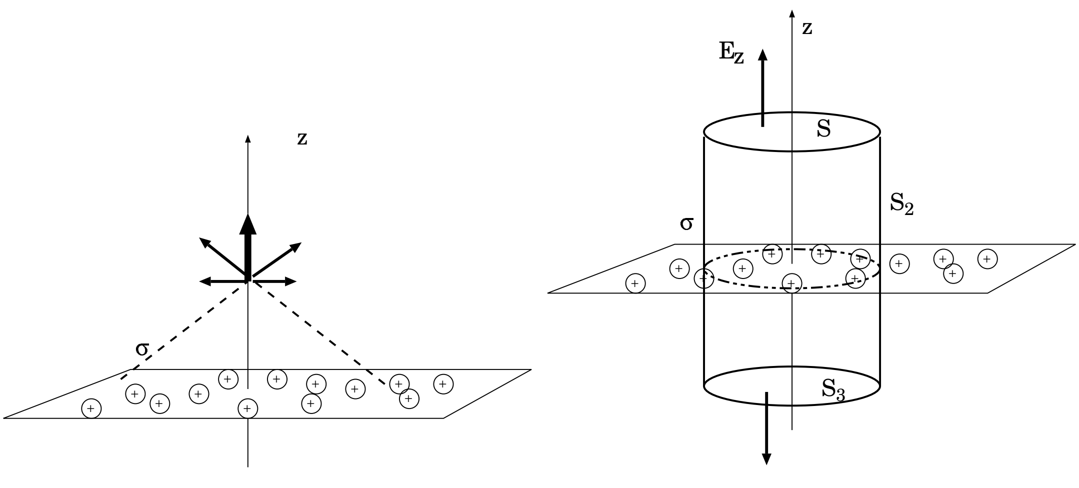


図 1: (左) 電場の xy 成分がキャンセルする様子．(右) ガウスの法則のあてはめ．閉曲面は円筒とした.

[1] こういうと，なんだか問題を解くためのテクニックのようだが，そうではなくて，考え方を示していると思って欲しい．これでうまくいくこともあれば，いかないこともある．後者の方が多いくらいである.

ガウスの法則の当てはめ

いま，閉曲面として，断面積 A の円筒を選び，上下の両底面を帯電平面に平行にとる．上下の底面をそれぞれ，S_1, S_3 として，側面を S_2 とする．この閉曲面に対してガウスの法則を当てはめる．

$$\int_{\text{閉曲面}\, S} dS\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E} \;=\; \int_{S_1} dS\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E} + \int_{S_2} dS\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E} + \int_{S_3} dS\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E}.$$

ここで，側面 S_2 に法線方向は帯電面に平行であるから，その電場の成分はないので，第2項は消える．上下底面での法線成分は E_z であり，面上の**場所には依存しない**ことから，

$$\int_{\text{閉曲面}\, S} dS\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E} \;=\; \int_{S_1} dSE_z + \int_{S_3} dSE_z = 2AE_z.$$

一方で，閉曲面に囲まれた領域に存在する総電荷量は $A\sigma$ であるから，

$$2AE_z = A\sigma/\epsilon_0 \Longrightarrow E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad \text{あるいは} \quad \boldsymbol{E} = \left(0, 0, \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\right) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\frac{\boldsymbol{z}}{|\boldsymbol{z}|} \tag{1}$$

少し驚いたことに，この電場は平面からの距離に依存しない．もはや選んだ閉曲面は円筒でなくてもよいことがわかる．これを二枚合わせて平板コンデンサーを作るのは次の問題である．

さて，帯電平面が無限でない場合にどうなるかを考えてみよう．まず，有限であることから，並進の対称性は無くなってしまう．例えば平面が正方形の場合は，観測位置を平行移動するともはや元の位置とはずれてしまっている．結果として，図1(左) のように必ず電場の水平成分をキャンセルする相棒がいる保証はない．唯一水平成分がキャンセルする位置は，ちょうど正方形の中心だけである．それ以外では水平成分は残る．もちろん，ガウスの法則はこの場合にも成立する．このとき，上と同様な閉曲面を考えた場合，側面からも電場のわきだしがあり，しかも側面の位置に依存していて，その積分を評価するのは大変面倒になる．ここまでくると，先になぜガウスの法則だけから電場が求まることがあるのか?という問いに答えられるであろう．

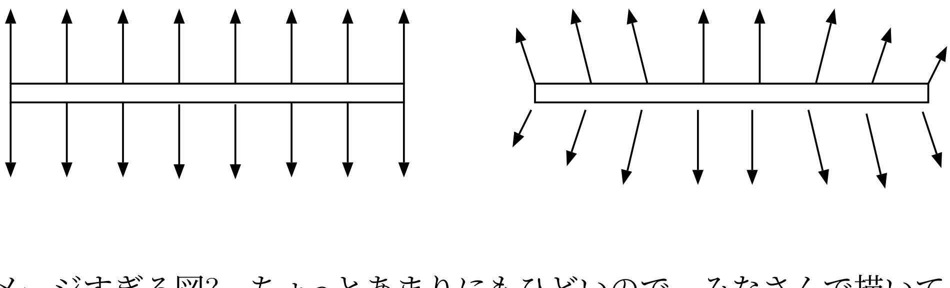


図 2: イメージすぎる図?．ちょっとあまりにもひどいので，みなさんで描いて見て下さい． 左は無限に広がった平板の例．有限の場合 (右) は 無限からのずれとして，平板に水平成分が端の近くで顕著に現れる．

問題 2 (練習問題 **1-2.3**)

この問題の電場は，前問の結果を重ね合わせて求めることができる．最も簡単なコンデンサーになっている．平板は無限に広いと仮定しているので，前問より重ね合わせの原理から，$E_z = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ となる．一様な電場が平板の間にのみ，面に垂直な方向に存在する．平板の外側では電場はキャンセルしてゼロになる．

このとき，二枚の平板の間の電位差 ΔV は，

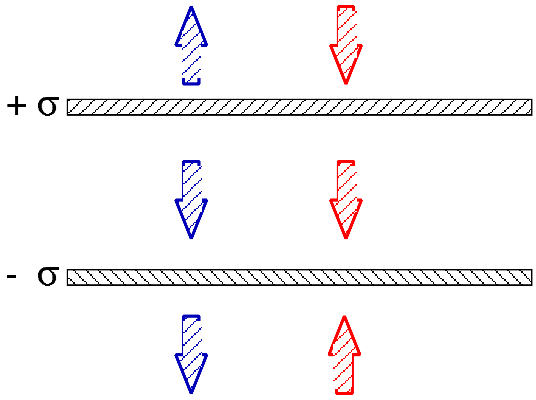
$$\Delta V = \int d\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{E} = \int_0^d dz E_z = \frac{\sigma d}{\epsilon_0}$$

となる．

また，平板の面積を S として，それぞれの平板に与えた電荷を $\pm q$ とすると，電位差は，$\Delta V = \frac{qd}{\epsilon_0 S}$ となる．このコンデンサーの電気容量は，

$$C = \frac{q}{\Delta V} = \frac{\epsilon_0 S}{d}$$

である．



問題 3 (練習問題 **1-2.5**) これはすでに配った練習問題の解答例に示してある．

第三回電磁気Bレポート問題

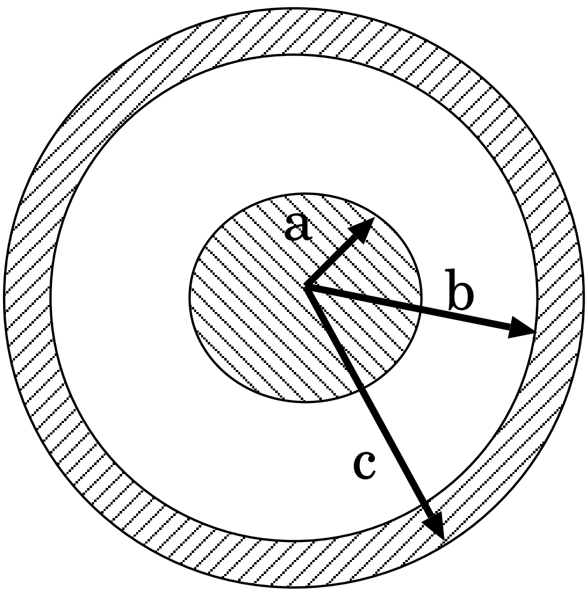
福島孝治 (東京大学大学院総合文化研究科)

平成 19 年 12 月 11 日: ver. 1.1

問題 1 「ガウスの法則+電位」: 一様に電荷分布した球 (半径 a) の作る電場をガウスの法則を用いて求めよ．答えだけでなく，その考え方も示し，電場の大きさを球の中心からの距離 r の関数としてグラフに図示せよ．また，電位を r の関数として求め，図示せよ．

問題 2「導体系にガウスの法則を使う ：] アルミでくるんだ半径 a のピンポン玉に電荷 $Q(>0)$ を与え，その外側を右図のように**導体球殻**(内径 $b(>a)$, 外径 c) で囲んだ．導体球殻の内側は絶縁体の膜があり，ピンポン玉の電荷は球殻には移動できないとする．

1. 下図のように，この導体球と導体球殻を同心に置いた場合に，電荷はどのように分布するか説明せよ．導体内部には電場はないことに注意せよ．
2. ガウスの法則を用いて，電場を求めよ．導体内部に電場がないことを確認せよ．
3. その場合の電位を求め，図示せよ．
4. 導体球の中心が導体球殻の中心からずれた場合に，電場や電位はどうなるかを理由を含めて説明せよ．
5. 導体球殻に電荷 $q(>0)$ を与えたときに，どうなるかを理由とともに説明せよ．
6. 同じように電荷 q が帯電された導体球殻が沢山あり，その中の一つだけに上の電荷を帯びた導体球 (ピンポン玉) が入っているとする．導体球殻は透明でなく，中は透けて見えない．このとき，どの導体球殻に導体球が入っているかを見つける方法を示せ．



問題 3：講義の感想や要望を記せ．