

となる．ところで，こんな双極子とは何なのよ．というのは，自然な疑問である．意味も分からずにこんな計算させられるのは拷問のようかも知れない．正負の電荷が対で置かれているときに，遠くから眺めてみたときの電場なのだが，まず，クーロンの法則で与えられている逆二乗よりもずっと弱くなっている．しかし，ゼロではない．この状況は，導体でない物質に電場をかけたときのミクロな世界で起きていることのモデル化になっている．つまり，導体ならば，自由電子が電場を中和するように再配列できるが，誘電体では電子は物質中を自由に動きまわらず，ミクロな単位（原子）内で電場の方向に移動すると考えるわけだ．誘電体では，この電気双極子が沢山つまっている状況を一つのモデルとして考えることができる．この電気双極子が電場の中で受ける力を考えると，どうして紙が下敷に引きつけられる理由に近付けるでしょう（か？）．

等電位面や電気力線の絵を書いた学生さんは気づいたかも知れないが，NS 極を持つ棒磁石の磁力線と同じように見える．

1.2-14 [平板間の電位差]:

平板が無限に広いと考えると，平板間の電場の大きさは場所に依存せずに $E = \frac{Q}{\epsilon_0 S}$ となる．ここで， S は平板の面積とする．電位差 V はちょうど片方の平板からもう一方の平板へ単位電荷をつれていくときの仕事である． d を平板間の距離とすると，

$$V = \int d\mathbf{x} \cdot \mathbf{E} = \int_0^d dz \frac{Q}{\epsilon_0 S} = \frac{Qd}{\epsilon_0 S}$$

となる．

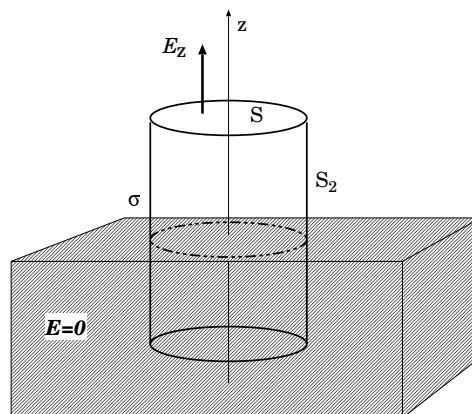
1.3 導体

1.3-1 [導体表面]:

静電平衡における導体の性質は次のとおりである．

- (a) 導体内部には電場はない．
- (b) 導体表面は面に垂直である．
- (c) 電荷は表面にのみ存在する．

このことに注意して，表面の（十分に平らだと思えるくらいに）微小領域にガウスの法則を当てはめると，表面の電荷面密度を σ として，



$$E_z = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

となる．

1.3-2 [一様な帯電球の作る電場]:

これはレポート問題に近いので後ほど．

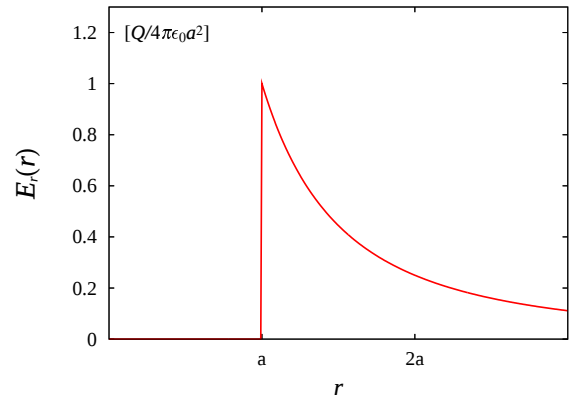
1.3-3 [導体球]: 静電場に関する以下の設問に答えよ．答えだけでなく，理由も明記せよ．

- (a) 半径 a の導体球に電荷 Q を与えたときに，その電荷は導体の表面に一様に分布する．これは半径 a の球殻に電荷 Q を与えた問題と同じになる．この，電場は動径方向を向いていて，

その大きさ $E(r)$ は，

$$E(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & \text{for } r \geq a \\ 0 & \text{for } r < a \end{cases} \quad (35)$$

となる．右にグラフを示す．

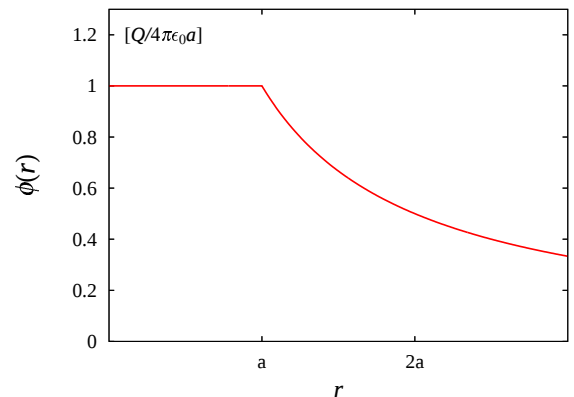


- (b)

電位は，無限遠を基準として， $r \geq a$ に対しては，

$$\begin{aligned} \phi(r) &= - \int_{\infty}^r dr' E(r') = - \int_{\infty}^r d'r \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \end{aligned} \quad (36)$$

となり， $r < a$ では電場はゼロなので電位は一定で， $\phi(r) = \phi(a) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}$ である．



- (c) 二つの導体球の電位はそれぞれ $\phi_a = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}$ ， $\phi_b = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 b}$ である．2つの導体の距離は非常に離れていて，お互いに影響を及ぼさない(つまり，静電誘導しないほど離れているとする)とする．導線で繋いだ後は，二つの球は一つの導体となるので電位は一定である．それぞれの導体に接続後に貯る電荷量を

Q', q' とすると、接続後の導体の電位 ϕ は、

$$\phi = \frac{Q'}{4\pi\epsilon_0 a} = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 b}$$

である．総電荷量是不変なので、 $Q + q = Q' + q'$ である．これらより、移動後の電荷は、

$$q' = \frac{b}{a+b}(q+Q), \quad Q' = \frac{a}{a+b}(q+Q)$$

であることがわかる．それぞれ変化分は、

$$q' - q = \frac{-aq + bQ}{a+b}, \quad Q' - Q = \frac{aq - bQ}{a+b}$$

であり、例えば $aq - bQ > 0$ ならば、小さな球から大きな球に $Q' - Q$ の電荷が移動することになる．

- (d) 導線で離れた後では、必ずそれぞれの電荷の間には、 $Q'/a = q'/b$ の関係がある．表面電場の大きさは、 $E_a = \frac{Q'}{4\pi\epsilon_0 a^2}$, $E_b = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 b^2}$ であるが、それらを比は、

$$\frac{E_a}{E_b} = \frac{Q'/a^2}{q'/b^2} = \frac{b}{a} < 1$$

となる．つまり、半径の小さな導体球の表面電場の方が大きいことがわかる．これが冬にドアで指先からバチッと電気が流れることの簡単な説明である．

1.3-4 [導体系にガウスの法則を使う]:

レポート問題なので、解答例は後ほど．

1.3-5 [導体球]:

導体についていろいろ考えてみようというのが問題の趣旨です．

- (a) まずは電荷分布がどのようなになっているかを定性的に考えてみよう．定性的なので、どこまで考えるかは不定だが、わかる範囲で答えてみることにする．まず、内側の導体球については、導体内部に電荷は安定に存在できないから⁹、導体の表面に分布することになるが、導体では等電位になっていることから、「導体球 A の表面での電荷量 q_A は一様に分布することになる」．

次に導体球殻 B を考える．B には 2 つの表面がある．一つは外側面、もう一つは内側面である．どちらも球表面なので、A と同様に電荷は一様に分布する．その電荷量は、導体球殻 B 内部に閉曲面を考えて、ガウスの法則を当てはめることによりわかる．内側面にある総電荷量を q' とし、導体内部に電場

⁹導体の内部に電場が存在できない、あるいは導体内部は等電位になることからこの性質は出て来る．では、この導体内部に電場がない理由は、導体の自由電子が電場を中和するように動くからだというのが講義での説明であった．もう少し説明出来ないのだろうか．...つづく．

がないことを考えると，ガウスの法則から $0 = q_A + q'$ がわかる． q_A は導体球 A の持っている電荷であるが，内側に誘起される電荷量は $q' = -q_A$ である．B には電荷 q_B が与えられていたので，内側面に $-q_A$ の電荷が誘起されたとしたら，外側面には $q_A + q_B$ が出てきているはずである．導体球殻 B には内側面に電荷量 $-q_A$ が，外側面には $q_A + q_B$ がそれぞれ一様に分布している．

- (b) 導体 A, B ではそれぞれ等電位になっているが，その電位を求めてみよう．それぞれ導体表面に一様分布した球殻の作る電位を求めればよい．導体球の中心からの距離 r が $r > b$ での電場は動径成分 E_r のみ存在し，その大きさは， $E_r(r) = \frac{q_A + q_B}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ である．外側の球殻での電位 ϕ_B は，無限遠を基準として，

$$\phi_B = - \int_{\text{無限遠}}^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{x} = - \int_{\infty}^b E_r dr = \frac{q_A + q_B}{4\pi\epsilon_0 r} \Big|_{\infty}^b = \frac{q_A + q_B}{4\pi\epsilon_0 b}$$

となる．また，導体球での電位 ϕ_A は，

$$\begin{aligned} \phi_A &= \phi_B - \int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{x} = \frac{q_A + q_B}{4\pi\epsilon_0 b} - \int_b^a \frac{q_A}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_A + q_B}{b} + \frac{q_A}{a} - \frac{q_A}{b} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_B}{b} + \frac{q_A}{a} \right) \end{aligned}$$

である．

- (c) この二つの導体を針金でつないだときには，電位差があれば電場が生じて，電荷を移動させる．電位差をみると， $q_A > 0$ であることから，

$$\Delta\phi \equiv \phi_B - \phi_A = \frac{q_A}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right] < 0$$

となり，いつでも ϕ_A の方が大きい．つまり，針金でつなぐと，A から B に電流がながれることになる．この結果は q_B の存在にはまったく依存していないことは不思議である．正でも負でも外側に電流は流れるのである．その移動電荷量は，電位差が無くなるまでである．移動後の A, B の電荷量を q'_A, q'_B とすると，それらには，電荷保存より， $q_A + q_B = q'_A + q'_B$ であり，また，等電位の条件

$$\phi'_B = \frac{q'_A + q'_B}{4\pi\epsilon_0 b} = \phi'_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q'_A}{a} + \frac{q'_B}{b} \right)$$

を満たす必要がある．これらを解くと， $q'_A = 0$, $q'_B = q_A + q_B$ となる．つまり，移動後には全ての電荷が B の方に移動するというわけである．電流は A から B に流れ，その移動電荷量は q_A である．

- (d) 導体をつなぐことで，その前後のエネルギーはどうなるかを議論してみよう．前と後のエネルギーをそれぞれ計算して，差をとってみればよい¹⁰．接続前

¹⁰もっと賢くするには，導体球のエネルギーが計算するだけでよいことがわかる．移動前後で導体球殻の電位が全く変わっていないことに注意すると，変化があったのは導体球 A に電荷がなくなったことである．

のエネルギー U_b ¹¹ は,

$$U_b = \frac{1}{2}q_A\phi_A + \frac{1}{2}q_B\phi_B = \frac{1}{2}q_A \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_A}{a} + \frac{q_B}{b} \right) + \frac{1}{2}q_B \frac{q_A + q_B}{4\pi\epsilon_0 b}$$

であり, 一方, 接続後のエネルギー U_a は,

$$U_a = \frac{1}{2}q'_B\phi'_B = \frac{1}{2}(q_A + q_B) \frac{q_A + q_B}{4\pi\epsilon_0 b}$$

なので, そのエネルギー差は,

$$U_a - U_b = \frac{q_A^2}{8\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right] < 0$$

となる. つまり, エネルギーはいつでも減ることがわかった¹². さて, 減ってしまったエネルギーはどこへ行ってしまったのだろうか? これは電荷の運動エネルギーに変わったわけだが, 普通は導体の中を電流が流れる時に格子との散乱によりジュール熱が発生して逃げてしまう¹³.

¹¹電荷が分布している場合の静電エネルギーは, $U = \frac{1}{2} \int dV \rho \phi$ で与えられる.

¹²エネルギーが減るのは自然な方向なので当たり前のことだろうか? もしも, エネルギーなる量を定義しているのであれば, ちゃんと計算して示すことができるはずである. 「エネルギーが低い状態というのは, 安定な状態である」と「安定な状態に系は移行する」では説明できていないと思う. 安定な状態とは ... エネルギーが低い状態 ... では議論がグルグル回っているだけである. 講義では, 高校の物理の公式の羅列の中でどの位のことが物理の議論で出て来るのか, あるいはお互いはどのように絡まっているのかを示して来たつもりであった. こういうウルトラ C を無批判に信じないために ... だが ...

さて, 上では実際に計算して, エネルギーが下がることを示した. その「自然な方向」が計算して示されたわけだ. 我々の考察の外から自然の方向として, エネルギーが下がることを考えなくても, すでに我々の考察のどこかにその性質が入っていたことになる. それはどこだろうか? ここで, 質問を投げ出してもよいのだが, もう少しだけ議論しよう. 導体の性質は, 導体中では等電位になるように電荷が分布することであった. ここでは針金でくっつけることで, 一つの導体になったわけだが, この導体の中で等電位になるように電荷の配置換えが起こった. この等電位への移行がエネルギーを低くすることと関係しているわけである. 一般的に, 「静電エネルギーを最小にするような電荷の配置は, その電位を一定にする配置である」ことが証明できる. ある閉じた空間で, 任意の適当な電荷分布 ρ' に対する電位 ψ と等電位 ϕ を与える電荷分布 ρ の静電エネルギーを比べると, 後者がいつも小さい, すなわち最小を与えることが示せる. これは宿題にしよう. 示すべきは,

$$U' - U \equiv \frac{1}{2} \int dV \rho' \psi - \frac{1}{2} \int dV \rho \phi = \frac{\epsilon_0}{2} \int dV (\nabla \psi)^2 - \frac{\epsilon_0}{2} \int dV (\nabla \phi)^2 \geq 0$$

である.

さて, 実際にこのエネルギー最小を要請することで移動後の電荷を求めてみよう. 接続後のエネルギーは, U_b の式の電荷を q'_A, q'_B にすればよく, 全電荷量 $q'_A + q'_B = q_{tot}$ は定数であることに注意すると,

$$U_b(q'_A) = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{q'^2_A}{a} + 2 \frac{q'_A q'_B}{b} + \frac{q'^2_B}{b} \right) = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \left(\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) q'^2_A + \frac{q'^2_{tot}}{b} \right)$$

となる. これを q'_A を変数とした時に, $q'_A = 0$ が最小を与える.

¹³ここでも, ジュール熱として逃げるのでエネルギーが下がるという, 逆の説明はまずい. 散乱が起きない, つまり電気抵抗のない超伝導体で作られた針金の場合にはエネルギーが逃げないことになってしまうが, これがウソなことは上の計算が示している. 電気抵抗があれば, そこでエネルギーを開放してしまうが, 超伝導体でつないだ場合は, 電荷は安定に静止することができなくて, 振動をくり返すことになる. それでもエネルギーは開放されるが, それはアドバンスな電磁気で議論するだろう.

1.3-6 [鏡映法 1]: 鏡映法により, 導体近傍の電場を求める問題である. 鏡映法は, 導体表面を鏡だと思って, 導体の外にある電荷の鏡像の位置に反対符号の電荷を置くことで電場を求める方法である. この方法だと, ある解の候補はすぐに思い付くだろう. 次に, それが正しいかどうかをどのように調べるが問題となる.

導体から距離 d の位置に電荷 q があるので, 鏡像電荷は $-d$ の位置に $-q$ の電荷があることになる. それぞれの電荷の位置ベクトルを $\mathbf{x}_1 = (0, 0, d)$, $\mathbf{x}_2 = (0, 0, -d)$ として, これらの電荷の作る位置 $\mathbf{x}$ での電場は重ね合わせの原理から,

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|^3} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_2}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_2|^3}$$

である. 導体の内部ではもちろん電場はゼロであるので, この表式は導体の外側でのみ正しい.

この電場が確かに導体の性質を満たしていることを確認しておく. まず, 導体表面ではこの電場は導体面に垂直でなくてはならない. 導体表面は, 面 $z = 0$ であり, $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1| = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_2|$ を満たす位置ベクトル $\mathbf{x} = (x, y, 0)$ である, そこでは, $E_x = E_y = 0$ となっており,

$$E_z(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|^3} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_2|^3} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2d}{|x^2 + y^2 + d^2|^{3/2}}$$

となり, z 方向にのみ成分があることがわかる.

一方で, 導体表面の電場とそこでの表面電荷密度の関係は問題 1.3-1 に示してある. 表面電場が求まったので, これを用いて, この導体表面の電荷密度が

$$\sigma(\mathbf{x}) = \epsilon_0 E_z(\mathbf{x}) = -\frac{q}{4\pi} \frac{2d}{|x^2 + y^2 + d^2|^{3/2}}$$

と求まる. 下にその表面電荷密度をグラフに示す. ちょうど, 電荷 q の真下の位置に負の大きな電荷が誘起されていることがわかる.

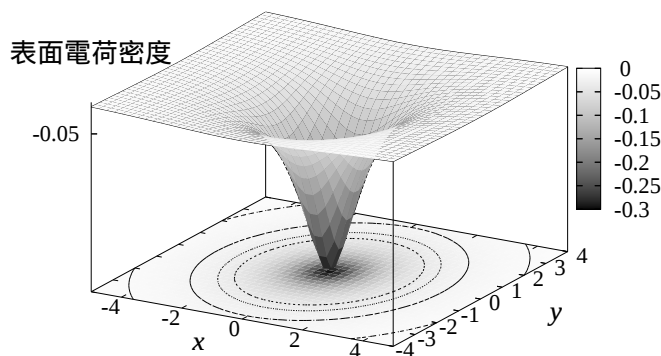


図 6: 点電荷を $(0, 0, 1)$ に置いた場合の $z = 0$ 平面上に誘起される表面電荷分布とその等高線. 縦軸のスケールは適当に決めた.

さて、導体表面に誘起された電荷の総量 Q を求めておく。表面電荷密度を全表面で積分すればよい。

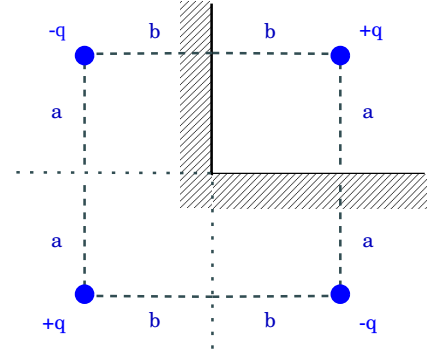
$$\begin{aligned}
 Q &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \sigma(\mathbf{x}) = - \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2d}{|x^2 + y^2 + d^2|^{3/2}} \\
 &\downarrow \text{ここで極座標を用いる}^{14} \\
 &= - \int_0^{\infty} r dr \int_0^{2\pi} d\theta \frac{q}{4\pi} \frac{2d}{|r^2 + d^2|^{3/2}} = - \frac{2dq}{4\pi} 2\pi \int_0^{\infty} dr \frac{r}{|r^2 + d^2|^{3/2}} \\
 &= -dq \left[-\frac{1}{|r^2 + d^2|^{1/2}} \right]_0^{\infty} = -q
 \end{aligned}$$

となる。実際に導体表面に誘起された電荷の総量が鏡映電荷は $-q$ に等しいことが確認できる。

1.3-7 [鏡映法 2]:

前問に引き続き、鏡映法の問題である。

正しい鏡映電荷配置は、図のようである。xy 平面で切り取ったときに、第二、第三象限に負電荷 $-q$ を置くだけでなく、第四象限にも正電荷 $+q$ を置く必要がある。もともとの電荷の位置を $\mathbf{r}_1 = (b, a, 0)$ 、それぞれの鏡映電荷の位置ベクトルを、 $\mathbf{r}_2 = (-b, a, 0)$ 、 $\mathbf{r}_3 = (-b, -a, 0)$ 、 $\mathbf{r}_4 = (b, -a, 0)$ とする。さて、導体を忘れて、この四つの点電荷配置での位置 $\mathbf{x}$ での電位は、



$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}_1|} - \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}_2|} + \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}_3|} - \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}_4|} \right) \quad (37)$$

となる。この問題での我々の電位に対する要請は、導体表面で電位が定数¹⁵となることである。そうすれば、導体表面での電場はその表面に垂直方向だけになる¹⁶。導体表面は、 $\mathbf{x}_1 = (x > 0, y = 0, z)$ と $\mathbf{x}_2 = (x = 0, y > 0, z)$ で表される。 $\mathbf{x}_1$ について、 $|\mathbf{x}_1 - \mathbf{r}_1| = |\mathbf{x}_1 - \mathbf{r}_4|$ また $|\mathbf{x}_1 - \mathbf{r}_2| = |\mathbf{x}_1 - \mathbf{r}_3|$ であることから、

$$\phi(\mathbf{x}_1) = 0 \quad (38)$$

がわかり、同様に $\phi(\mathbf{x}_2) = 0$ であることもわかる。これで式 (37) が求めたい電位であることが示された。電場は、各成分ごとに表すと、

$$E_x(\mathbf{x}) = -\frac{\partial}{\partial x} \phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{x-b}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}_1|^3} - \frac{x-b}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}_4|^3} - \frac{x+b}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}_2|^3} + \frac{x+b}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}_3|^3} \right)$$

¹⁴ $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ とすると、 $dx dy = r dr d\theta$ になる。

¹⁵ 必ずしも 0 になる必要はない。そもそも電位には定数の不定性があったことを思い出そう。その定数は電場 $\mathbf{E} = -\nabla \phi$ には寄与しない。

¹⁶ もし水平成分がゼロでないとすると、導体中の自由に動ける電荷がその電場方向に移動し、最終的には電場を中和するように電荷配置が変わる。

$$E_y(\mathbf{x}) = -\frac{\partial}{\partial y}\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{y-a}{|\mathbf{x}-\mathbf{r}_1|^3} - \frac{y-a}{|\mathbf{x}-\mathbf{r}_2|^3} + \frac{y+a}{|\mathbf{x}-\mathbf{r}_3|^3} - \frac{y+a}{|\mathbf{x}-\mathbf{r}_4|^3} \right)$$

$$E_z(\mathbf{x}) = -\frac{\partial}{\partial z}\phi = \frac{qz}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{r}_1|^3} - \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{r}_2|^3} + \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{r}_3|^3} - \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{r}_4|^3} \right)$$

比例定数は適当に設定し、電位と電場を下図に描いておく。

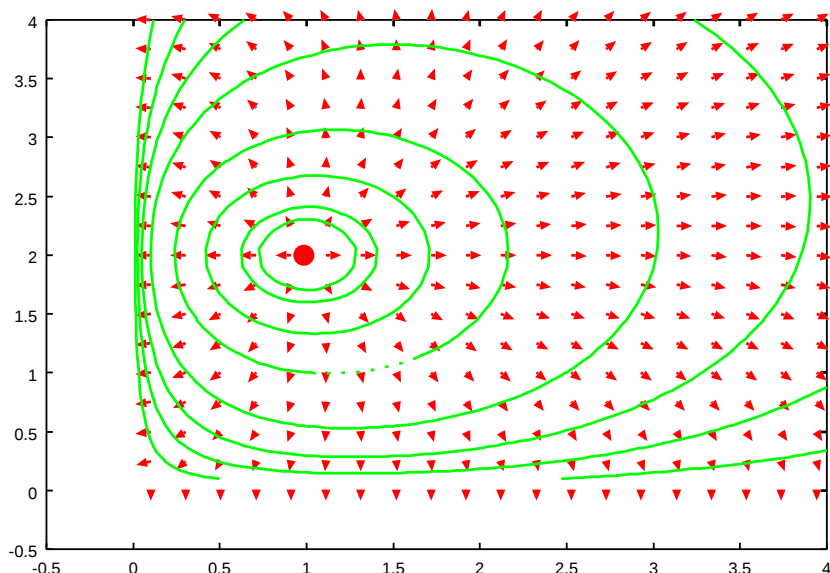


図 7: 点電荷を $(1, 2, 0)$ に置いた場合の $z = 0$ 平面上での等電位線 (線) と電場 (矢印)。

次に導体表面に誘起された電荷分布を示す¹⁷。ガウスの法則から、導体表面での電場の法線成分と誘起電荷面密度の関係は、 $E_n = \sigma/\epsilon_0$ なので、平面 $y = 0$ と $x = 0$ 上の電荷密度をそれぞれ σ_y 、 σ_x と書くと、

$$\sigma_{y=0} = \epsilon_0 E_y(\mathbf{x}_1) = \frac{-qa}{2\pi} \left(\frac{1}{((x-b)^2 + a^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{1}{((x+b)^2 + a^2 + z^2)^{3/2}} \right)$$

$$\sigma_{x=0} = \epsilon_0 E_x(\mathbf{x}_2) = \frac{-qb}{2\pi} \left(\frac{1}{(b^2 + (y-a)^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{1}{(b^2 + (y+a)^2 + z^2)^{3/2}} \right)$$

となる。 $\sigma_{y=0}$ について、図に描いてみる (図 8)。

さて、最後の課題はこの誘起電荷分布を導体表面で積分するとどうなるかを調べることである。もちろん、これは先に導入した鏡映電荷の合計に等しくなっているはずである。ここで少し漠然とした疑問がある。無限平面の近くに 1 つだけ点

¹⁷ くだいかも知れないが、あくまでも鏡映法は、境界値問題のひとつの解き方であって、決して鏡映電荷が導体の中に出てくるわけではない。導体に誘起される電荷分布は表面にのみ現れる。その誘起された問題と鏡映電荷の問題が、導体の外側では全く等価だということを注意しておく。

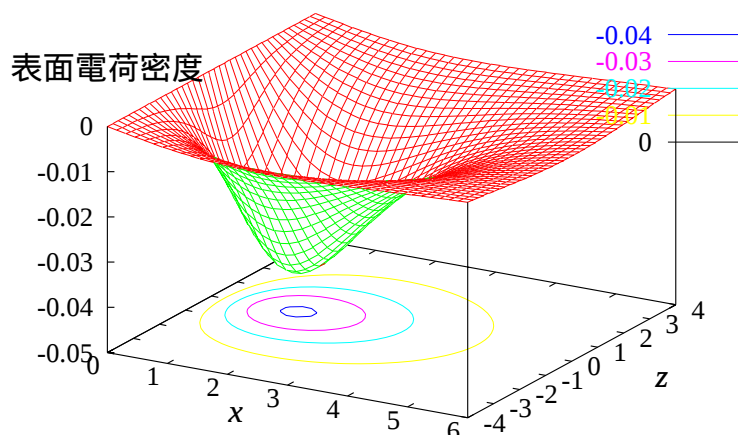


図 8: 点電荷を $(1, 2, 0)$ に置いた場合の $y = 0$ 平面上に誘起される表面電荷分布とその等高線。縦軸のスケールは適当に決めた。

電荷がある場合は、誘起電荷を与える項はその点電荷から来ていた。今回の場合、平面は $y = 0$ と $z = 0$ の 2 つに分けられるが、 $\sigma_{y=0}$ にも $\sigma_{z=0}$ にも全ての点電荷の項が入っている。それぞれ独立に計算 (できた) すると $-q/2$ ずつ分配されて出てくるのだろうか。

まず、 $y = 0$ 平面上に誘起される全電荷 $q_{y=0}$ は、

$$\begin{aligned} q_{y=0} &= \int_0^\infty dx \int_{-\infty}^\infty dz \sigma_{y=0} \\ &= \frac{-qa}{2\pi} \int_0^\infty dx \int_{-\infty}^\infty dz \left(\frac{1}{((x-b)^2 + a^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{1}{((x+b)^2 + a^2 + z^2)^{3/2}} \right) \end{aligned}$$

この積分は少し難しいが、次のようになる。被積分関数の x 依存性だけがちがうのが気持ち悪いので、 $x \pm b \rightarrow x'$ 変数変換すると、測度は不変で積分領域がずれる。

$$\begin{aligned} q_{y=0} &= \frac{-qa}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty dz \left(\int_{-b}^\infty dx - \int_b^\infty dx \right) \frac{1}{(x^2 + a^2 + z^2)^{3/2}} \\ &= \frac{-qa}{\pi} \int_0^\infty dz \int_{-b}^b dx \frac{1}{(x^2 + a^2 + z^2)^{3/2}} \\ &\downarrow z \text{ について積分 } \int dz \frac{1}{(A^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{z}{A^2(z^2 + A^2)} \\ &= \frac{-qa}{\pi} \int_{-b}^b dx \left[\frac{z}{(x^2 + a^2)(z^2 + x^2 + a^2)^{1/2}} \right]_0^\infty \\ &= \frac{-qa}{\pi} \int_{-b}^b dx \frac{1}{x^2 + a^2} \\ &\downarrow x = a \tan \theta, dx = a \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{qa}{\pi} \int_{\arctan(-b/a)}^{\arctan(b/a)} d\theta a \frac{1}{\cos^2 \theta} \frac{1}{a^2(1 + \tan^2 \theta)} \\
&= -\frac{q}{\pi} (\arctan(b/a) - \arctan(-b/a)) = -\frac{2q}{\pi} \arctan(b/a) \quad (39)
\end{aligned}$$

$x = 0$ 平面についても同様な計算から、

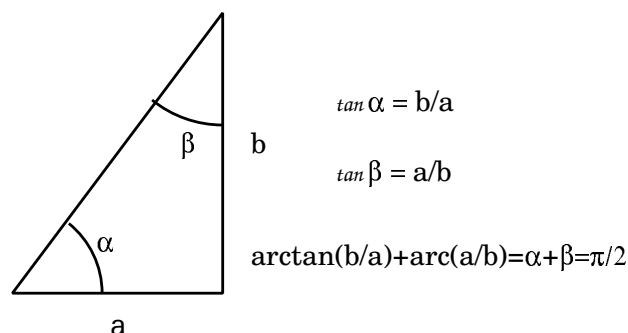
$$q_{x=0} = -\frac{2q}{\pi} \arctan(a/b) \quad (40)$$

となり、全誘起電荷 q_{tot} は、

$$\begin{aligned}
q_{tot} &= -\frac{2q}{\pi} (\arctan(b/a) + \arctan(a/b)) \\
&\downarrow \arctan(b/a) + \arctan(a/b) = \frac{\pi}{2} \\
&= -q \quad (41)
\end{aligned}$$

これで誘起電荷が鏡映電荷の合計に等しいことが示された。最後の $\arctan$ の関係式はなかなか気づきにくいだが、図で描くと良く分かる。

先程の電荷の分配の疑問だが、上記のように点電荷の位置のずれに反映して2つの平面に移る電荷の大きさが変わって来る。ちょうど位置が $r_1 = (a, a, 0)$ のときに $-q/2$ づつに分かれている。



1.4 コンデンサーと電気容量

1.4-1 [球殻導体のコンデンサー容量]: 半径 a と $b(>a)$ の二つの導体球にそれぞれ $\pm Q$ の電荷を与えたとすると、それぞれの導体の電位は、 $\phi_a = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}$, $\phi_b = \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 b}$ である。このとき電位差は、

$$\phi_b - \phi_a = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right)$$

であるので、比例係数から電気容量は、

$$C = \frac{Q}{\phi_b - \phi_a} = 4\pi\epsilon_0 \frac{1}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}$$

となる。

関連する問題:地球の静電容量：地球を大きな導体と考えるとその電気容量はどの位だろうか．半径 a の球導体に電荷量 q を与えれば，その電位は無限遠を基準として， $\phi = q/4\pi\epsilon_0 a$ である．この場合の静電容量は， $C = q/\phi = 4\pi\epsilon_0 a$ であり， $a = 6400\text{Km}$ を代入すると， $C = 4 \times 3.14 \times 8.85 \times 10^{-12} \times 6.4 \times 10^6 \simeq 7.1 \times 10^{-4} [F]$ である．例えば，1C の電気量を貯めるのに，1400V もかかってしまう．そこら辺の小さなコンデンサーでも数十 μF 程度あるのを考えると，ちょっと地球に電荷を貯めるのは効率悪そうである．

1.4-2 [コンデンサーの合成]:

- (a) まず C_2 と C_3 は並列なので，合成容量は $C_2 + C_3 = 6\mu F$ となり， C_1 との直列接続から，合計電気容量は，

$$C_{tot} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2+C_3}} = \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}} \mu F = 2\mu F$$

となる．

- (b) 全体に貯まる電荷量とコンデンサー C_1 に貯まる電荷量が同じであることから M での電位を求める．AM 間の電位差を V_{AM} とすると，

$$V_{AM} \times 3\mu F = 200V \times 2\mu F \implies V_{AM} = \frac{400}{3} V$$

- (c) C_1 の電荷量は， $3\mu F \times \frac{400}{3} V \simeq 4.0 \times 10^{-4} C$

$$C_2 \text{ の電荷量は， } 2\mu F \times (200 - \frac{400}{3}) V \simeq 1.3 \times 10^{-4} C$$

$$C_3 \text{ の電荷量は， } 4\mu F \times (200 - \frac{400}{3}) V \simeq 2.7 \times 10^{-4} C$$

1.4-3 [コンデンサーをつないだとき ...]:

この問題の趣旨は，導体コンデンサーの性質を通じて，電位と電荷の動きを理解することがである．ここでは 1.3-5 の問題を一般的にして，コンデンサーの形状によらない議論をする．

まず，静電容量が C_1 と C_2 のコンデンサーの接続前の電荷量をそれぞれ Q_1 ， Q_2 とする．接続後にそれらは Q'_1 と Q'_2 に変化したとする．電荷の保存より， $Q_1 + Q_2 = Q'_1 + Q'_2$ であり，電荷の移動量を Δ とすると，それを用いて $Q'_1 = Q_1 - \Delta$ ， $Q'_2 = Q_2 + \Delta$ と表せる．ここで Δ はコンデンサー 1 から 2 への電荷の移動を正の方向としている．

接続後は，2 つの導体は 1 つの導体になりことから，電位は一定になる．その電位を ϕ' は，接続後の電荷量と容量を用いて，

$$\phi' = \frac{Q'_1}{C_1} = \frac{Q_1 - \Delta}{C_1} = \phi_1 - \frac{\Delta}{C_1} = \frac{Q'_2}{C_2} = \frac{Q_2 + \Delta}{C_2} = \phi_2 + \frac{\Delta}{C_2}$$

と表せる．この式を Δ について解けば，

$$\Delta = (\phi_1 - \phi_2) / \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) = \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} (\phi_1 - \phi_2)$$

となる． $\phi_1 \geq \phi_2$ の場合は， $\Delta \geq 0$ となり，電荷は 1 から 2 へ移動し，逆に $\phi_1 \leq \phi_2$ の場合は 2 から 1 へ移動する．いずれの場合も，電位の高い方から低い方へ電荷は移動していることがわかる．

また，その時の電位は，

$$\phi' = \phi_1 - \frac{\Delta}{C_1} = \phi_1 - \frac{C_2}{C_1 + C_2} (\phi_1 - \phi_2) = \frac{C_1 \phi_1 + C_2 \phi_2}{C_1 + C_2}$$

である．

さて，この導体の静電エネルギーを考えてみよう．電荷を Q ，電位を ϕ としたときに，静電エネルギーは $\frac{1}{2} Q \phi$ で与えられる．この問題の 2 つの導体の接続前後でのエネルギーを計算してみる．接続前は，

$$E_{\text{前}} = \frac{1}{2} Q_1 \phi_1 + \frac{1}{2} Q_2 \phi_2 = \frac{1}{2} (C_1 \phi_1^2 + C_2 \phi_2^2)$$

であり，一方で接続後のエネルギーは，

$$E_{\text{後}} = \frac{1}{2} (Q_1 + Q_2) \phi' = \frac{1}{2} (Q_1 + Q_2) \frac{C_1 \phi_1 + C_2 \phi_2}{C_1 + C_2} = \frac{1}{2} \frac{(C_1 \phi_1 + C_2 \phi_2)^2}{C_1 + C_2}$$

である．その差を計算してみると，

$$E_{\text{後}} - E_{\text{前}} = \frac{1}{2} \left(\frac{(C_1 \phi_1 + C_2 \phi_2)^2}{C_1 + C_2} - C_1 \phi_1^2 - C_2 \phi_2^2 \right) = -\frac{1}{2} \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} (\phi_1 - \phi_2)^2$$

である．その差を計算してみると，

$$E_{\text{後}} - E_{\text{前}} = \frac{1}{2} \left(\frac{(C_1 \phi_1 + C_2 \phi_2)^2}{C_1 + C_2} - C_1 \phi_1^2 - C_2 \phi_2^2 \right) = -\frac{1}{2} \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} (\phi_1 - \phi_2)^2$$

となる．つまり，接続後のエネルギーはいつでも減ることがわかった．エネルギーが下がらない場合は，接続前の電位差が無い場合で，その時は電荷は移動しない．

1.4-4 [コンデンサーのエネルギー]: 容量が C_1, C_2 の 2 つのコンデンサーにそれぞれ電荷 q_1 と q_2 を蓄えてある．その 2 つのコンデンサーを並列につなげるとコンデンサーのエネルギーは必ず損をする．(a) このことを示してみよう．(b) また，損したエネルギーはどこにいったのか？

1.4-5 [コンデンサー]:

面積 S の 2 枚の同じ導体板 A と B を距離 d だけ離して平行に並べる．導体板 A に q ，B に $-q$ の電荷を与えた．以下の問いに答えよ．但し，この導体板は非常に大きく，端の効果は考えなくてよいとする．