物理学 (電磁気学) 練習問題編

福島孝治 (東大院総合文化)

Ver. 1.0:	2007.10.10	初版
Ver. 1.1:	2007.11.12	問題追加

1　静電場の世界

1.1　電荷の存在・クーロンの法則

1.1–1 [**電荷量**]**:**銅は銅原子一個につき 1 つの伝導電子がある．10g の銅の伝導電子の総電荷量は何クーロンか?

1.1–2 [**クーロン力**]**:**1 クーロンの 2 つの点電荷を 1m の距離におくとき，それらの間に働くクーロン力は?

1.1–3 [**水素原子でのクーロン力の強さ**]**:** 水素原子中で，電子と陽子間に働くクーロン力と万有引力の大きさの比を求めてみよう．以下の数値を用いてよい．

電子の電荷	1.6×10^{-19} C
真空の誘電率 ϵ_0	$8.9 \times 10^{-12}\mathrm{C}^2/\mathrm{N\ m}^2$
万有引力定数 G	6.7×10^{-11} N $\mathrm{m}^2/\mathrm{kg}^2$
電子の質量 m_e	9.1×10^{-31} kg
陽子の質量 m_p	1.7×10^{-27} kg

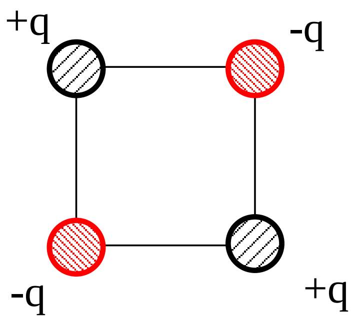
1.1–4 [**身近な電磁気力**]**:**何故日常生活では電磁気力よりも万有引力 (重力) を主に感じるか理由を考察せよ．または電磁気力を普段感じることがあるか?

1.1–5 [**電荷の中性**]**:**もしも水素原子において，電子と陽子の電荷の中性がずれていたとしたら，何が起きるだろうか?現実世界を考慮して，許されるずれの大きさをおおざっぱに見積もってみよう。

1.1–6 [**クーロン力** 1]**:** 平面上にある一辺の長さが a の正方形の 4 つの頂点に点電荷 $q,-q$ が隣りの符号が異なるように固定されている．

(a) それぞれの電荷の受けるクーロン力を求めよ．

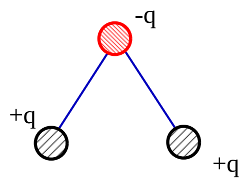
(b) 点電荷の固定を外すと，電荷はどうなるか?



1.1–7 [**クーロン力** 2]**:**平面上にある一辺が a の正三角形の 3 つの頂点に点電荷 $q,-q$ を図のように固定した．

(a) それぞれの電荷の受けるクーロン力を求めよ．

(b) 点電荷の固定を外すと，電荷はどうなるか?

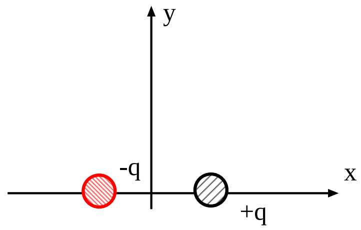


1.1–8 [**2つの異なる電荷のつくるクーロン電場**]**:**右図のように，正電荷 q と負電荷 $-q$ を距離 a だけ離して x 軸上に置く．この2つの電荷が作る電場を考える．

(a) y 軸上で，原点から距離 y の点にある位置における電場$\boldsymbol{E}$を求めよ．$y \gg a$ であると仮定して求めよ．

(b) x 軸上で，原点から距離 x の点にある位置における電場$\boldsymbol{E}$を求めよ．$x \gg a$ であると仮定して求めよ．

(c) * 2つの電荷から十分に離れた位置における電場$\boldsymbol{E}$を求めよ．



1.1–9 [**球対称な電荷の作る電場**]**:** 半径 a の球面上に一様な面電荷密度 σ で分布している球殻の作る電場を考える．特に，球殻の内側と外側に分けて考えること．

(a) 周囲をアルミホイルでくるんだピンポン玉がある．ピンポン玉の中は空洞である．最初，このピンポン玉は電荷を帯びていないとする．どのようにすれば，上記のように表面に一様な電荷分布をもった球ができるか．その方法とそのために必要な道具を提案せよ．

(b) 球殻の内部に電場はないことを示せ．

(c) 球殻の外部の電場を求めよ．

1.1–10 [**一様平面電荷の作る電場**]**:** 平面の一様電荷分布を σ として，ある観測位置$\boldsymbol{x}$での電場$\boldsymbol{E}$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\int_S dS' \frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^2}\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} \tag{1}$$

となる．平板が無限に広がっている場合について考察せよ．

1.1–11 [**一様に帯電した直線電荷の作る電場**]**:** 一様な線密度 λ で帯電している無限に長い直線電荷の作る電場を求めよ．有限の長さ l のときはどのようになるか考察せよ．

1.1–12 [**クーロン場の発散**]**:** 原点0にある電荷 q の点電荷が位置$\boldsymbol{r}$= (x, y, z) につくるクーロン電場

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{|\boldsymbol{r}|^2}\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)\end{aligned}$$

について，原点以外で発散がゼロになっていること，すなわち，$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = 0$ を示せ．

また，原点以外で回転がゼロになっていること，すなわち，$\nabla\times\boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}$.

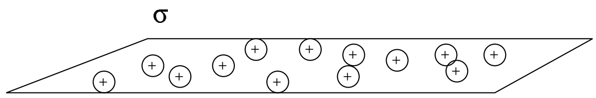
1.1–13 [**ベクトルの性質**]**:** 一般のベクトル$\boldsymbol{A}$= (A_x, A_y, A_z) について，次の式を示せ：

$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = 0$$

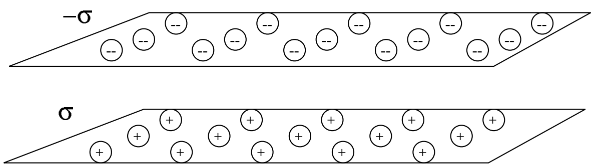
1.2 電場とガウスの法則

1.2–1 [**ガウスの法則の例題**]**:1.1-9**, **1.1-10**, **1.1-11** をガウスの法則を使って再考せよ．

1.2–2 [**平板電荷の電場について**]**:**電荷面密度 σ で帯電させた無限に広い平板がつくる電場をガウスの法則を用いて求めよ．その結果を立体角を用いて示せ．また，平板が有限の大きさ，例えば一辺 a の正方形になった場合にどのように変わるかを説明せよ．



1.2–3 [**二枚の平板電荷**]**:** それぞれ正と負に一様に帯電した無限に広い平板が距離 d だけ離れて平行に置かれている．それぞれの面密度は $+\sigma, -\sigma$ とする．これらの平板が作る電場を求めよ．



1.2–4 [**一様に帯電している円柱の作る電場**]**:** 半径 a の円柱の一様な密度 ρ で電荷が一様に分布している．

(a) この円柱の作る電場をガウスの法則を使って求めよ．

(b) また，円柱の内側を中心を同じで半径 $b(< a)$ の円柱でくりぬいたときにできる電場を求めよ．

(c) くりぬいた円柱の中心が外の円柱の中心とずれた場合を考察せよ．

1.2–5 [**ガウスの法則だけから電場のルールが全て決まらないこと**]**:**電荷分布を $\rho(\boldsymbol{x})$ として，ガウスの法則の微分形

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = \rho(\boldsymbol{x})/\epsilon_0 \tag{2}$$

を満たすベクトル場$\boldsymbol{E}$があるとき，任意のベクトル場$\boldsymbol{A}$を用いて新しいベクトル場

$$\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E} + \nabla \times \boldsymbol{A}$$

を作ると，これもまたガウスの法則 (2) を満たすことを示し，ガウスの法則だけから電場の関数形が決まらない理由を説明せよ．また，この理由はもっと単純に説明できないだろうか.

1.2–6 [**ガウスの法則と渦無しの法則から...**]**:**静電場の法則は，ガウスの法則 ($\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho/\epsilon_0$) と渦無しの法則 ($\nabla \times \boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}$) で表すことができる．この二つからクーロンの法則は出てくるのか？

1.2–7 [**ベクトル場の演算**]**:**ベクトル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = (3x^2y, -2xyz, xz^3)$ に対して，次の式を計算せよ.

$$(1)\nabla \cdot \boldsymbol{A}, \quad (2)\nabla \times \boldsymbol{A}, \quad (3)\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A})$$

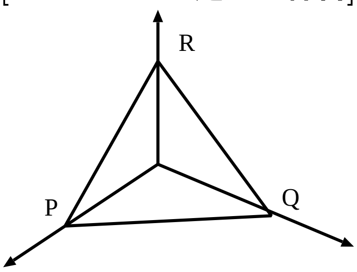
1.2–8 [**ガウスの定理の練習**]**:** 3つの平面$x = 0, y = 0, z = 0$と3つの平面$x = 1, y = 1, z = 1$で囲まれた立方体をV，その表面をSとするとき，ベクトルば$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = (xy, yz, zx)$に対して、ガウスの定理が成り立つことをガウスの定理の両辺をそれぞれ計算して確かめよ.

1.2–9 [**ストークスの定理**]**:**任意の面 S に対して，ベクトル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ が次の式を満たすことを示せ.

$$\int dS\boldsymbol{n} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \int_C d\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{A}$$

ここで，n は面の法線ベクトルであり，右辺の積分は面の周辺に対する線積分を表す.

1.2–10 [**ストークスの定理の練習**]**:**



x 軸，y 軸，z 軸と面 $x + y + z = 1$ の交点を P, Q, R とすると，面 PQR に対して，ベクトル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = (z^2, x^2, y^2)$ がストークスの法則を満たすことを確認せよ.

1.2–11 [**保存力**]**:**ベクトル $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = f(r)\boldsymbol{x}$ で与えられている力は保存であることを示せ．すなわち，$\nabla \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$ を示せ．ここで，$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ であり，$f(r)$ は r のある関数であるとする.

1.2–12 [**ガウスの法則 (再度)+電位**]**:**一様に電荷分布した球 (半径 a) の作る電場をガウスの法則を用いて求めよ．答えだけでなく，その考え方も示し，結果をグラフに図示せよ．また，電位を求め，図示せよ.

1.2–13 [**電気双極子**]**:**z 軸上の二点 $(0, 0, a)$ と $(0, 0, -a)$ に電荷量 q，$-q$ の点電荷を置く.

(a) 観測位置$\boldsymbol{R}$$= (x, y, z)$ が a に比べて大きいときに，電位 ϕ が

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{R}}{|\boldsymbol{R}|^3}$$

と表せることを示せ．ここで，ベクトル $\boldsymbol{p}$ は $(0, 0, 2aq)$ である．

(b) 1. のときに，電場を求めよ．2 つの隣接する電荷が作る電場が遠くからどのように見えるかを説明せよ．

1.2–14 [**平板間の電位差**]**:**それぞれ $\pm Q$ の電荷が一様に分布している二枚の平行な板の間の電位差を求めよ (1.2-3).

1.3 導体

1.3–1 [**導体表面**]**:**導体表面の電場をガウスの法則を用いて求めよ．

1.3–2 [**一様な帯電球の作る電場**]**:** 静電気に関する以下の問について答えよ．

(a) 半径 a の球を一様な電荷密度 ρ を持つように帯電させた．中心からの距離 r における電場の大きさ $E(r)$ を求め，距離 r の関数としてグラフを図示せよ．

(b) また，この場合の電位を $\phi(r)$ を求め，同様に図示せよ．電位の基準は，無限遠を 0 とする．

(c) 次に，この球を中心が同じである導体球殻 (内径 b，外径 c，$(a < b < c)$) で囲った．この導体には電荷を与えていない．このときの電場の大きさ $E(r)$ を求め， 距離 r の関数としてグラフに図示せよ．

(d) この導体球殻での電荷分布がどのようになっているのかを説明せよ．

1.3–3 [**導体球**]**:** 静電場に関する以下の設問に答えよ．答えだけでなく，理由も明記せよ．

(a) 半径 a の**導体球**に電荷 Q を与えた．このとき，球の中心からの距離 r における電場の大きさ $E(r)$ を求め，距離 r の関数としてグラフを図示せよ．

(b) また，この場合の電位を $\phi(r)$ を求め，同様に図示せよ．電位の基準は，無限遠を 0 とする．

(c) (a) と同様に半径 b$(< a)$ の導体球に電荷 $q(< Q)$ を与え，先の導体球から非常に離れた位置に置く．この 2 つの導体球を細い導線で下図のように繋いだときに，何が起きるかを説明せよ．

(d) 2 つの導体球のどちらの表面電場が強いかを答えよ．

1.3–4 [**導体系にガウスの法則を使う (ちょっと難しいかなー)**]: 半径 a の**導体球**に電荷 $Q(>0)$ を与え，**導体球殻**(内径 $b(>a)$, 外径 c) には電荷 $q(>0)$ を与えた．

(a) 下図のように，この導体球と導体球殻を同心に置いた場合の電場を求めよ．導体であることの性質を考えて，ガウスの法則を用いよ．

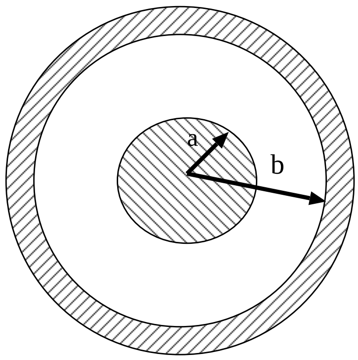
(b) その場合の電位を求め，図示せよ．

(c) 導体球の中心が導体球殻の中心からずれた場合はどうなるかを理由を含めて説明せよ．

(d) 同じように電荷 q が帯電された導体球殻が沢山あり，その中の一つだけに上の導体球が入っているとする．導体球殻は透明でなく，中は透けて見えない．つまり，どの導体球殻に導体球が入っているかはわからない状況にある．もちろん，手にとって振ってみれば，カラカラ音がすることで判別できる．さて，手を振れずに見破ることはできるか．できるならば，そのタネを示せ．

1.3–5 [**導体球**]: 半径 a の導体球 A に電荷量 q_A を帯電させて，その外側を電荷量 q_B を帯電させた半径 b の薄い導体球殻で囲ったとする． 以下の問いに答えよ．

(a) それぞれの導体での電荷分布はどのようになっているか，定性的に説明せよ．



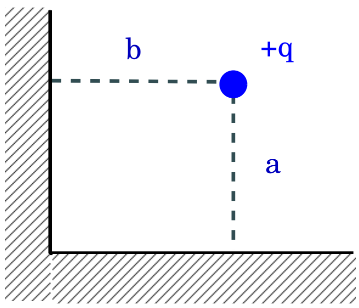
(b) それぞれの導体 A,B の電位を求めよ．

(c) $q_A > 0$ として，導体 A,B を細い針金でつないだときに，針金を流れる電流の方向はどうなるか? また，流れた電荷量はいくらか?

(d) この導体系のエネルギーは，針金をつないだ前後でどうなるかを考察せよ．

1.3–6 [**競映法 1**]: 無限に広い導体面から距離 d の位置に点電荷 q があるときの電場を求めよ．また導体表面に誘起された電荷を求めよ．

1.3–7 [**競映法 2**]:

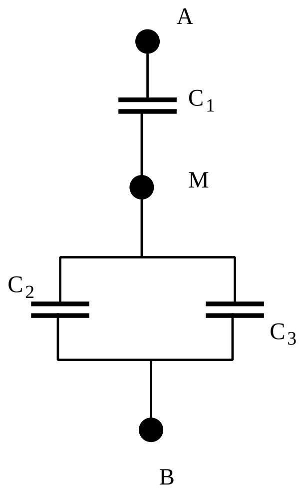


直角に曲がった導体板の近くに電荷を持ってきたときの電位・電場を求めよ (右図)。映像法を使うとよい。また、導体表面への誘導電荷を計算せよ。(全誘導電荷は総映像電荷に等しいはずである。これを確かめよ。)

1.4　コンデンサーと電気容量

1.4–1 [**球殻導体のコンデンサー容量**]**:** 半径 a と $b(> a)$ の 2 つの球殻導体が同心円にある．このコンデンサーの電気容量を求めよ．

1.4–2 [**コンデンサーの合成**]**:**



図のように 3 つのコンデンサーを接続し，AB 間に 200V の電圧をかけた．コンデンサーの静電容量はそれぞれ，$C_1 = 3\mu F$, $C_2 = 4\mu F$, $C_3 = 2\mu F$ $\mu = 10^{-6}$ である．

(a) 合成容量はいくらか?

(b) 点 M での電位は?

(c) 各コンデンサーの電荷量は?

1.4–3 [**コンデンサーをつないだとき ...**]**:** 無限遠に対する電位が ϕ_1，ϕ_2，静電容量が C_1，C_2 である 2 個の導体が十分離れて置いてある．これらを細い針金でつないだ．

(a) このときに，針金を流れる電流はどちら向きで，流れる電荷量はいくらか?

(b) 最終状態における導体の電位を求めよ．

1.4–4 [**コンデンサーのエネルギー**]**:** 容量が C_1,C_2 の 2 つのコンデンサーにそれぞれ電荷 q_1 と q_2 を蓄えてある。その 2 つのコンデンサを並列につなげるとコンデンサーのエネルギーは必ず損をする。(a) このことを示してみよう。(b) また、損したエネルギーはどこにいってしまったのか?

1.4–5 [**コンデンサー**]**:**
面積 S の 2 枚の同じ導体板 A と B を距離 d だけ離して平行に並べる．導体板 A に q，B に $-q$ の電荷を与えた．以下の問いに答えよ．但し，この導体板は非 常に大きく，端の効果は考えなくてよいとする．

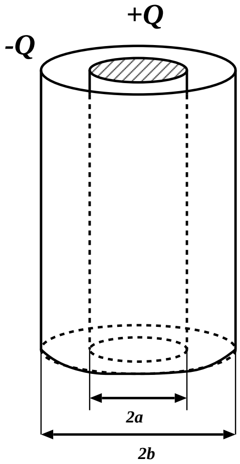
(a) 導体板 A だけが作る電場を求めよ．

(b) 2 枚の導体板の間の電場を求めよ．

(c) この 2 枚の導体板からなるコンデンサーの電気容量を求めよ．

(d) このコンデンサーに蓄えられたエネルギーを求めよ．

1.4–6 [**円柱コンデンサーの電気容量**]:



左図のように半径 a の円柱と半径 $b(>a)$ の円筒の導体が中心が同じになるように置かれている．それぞれの線電荷密度 (単位長さあたりの電荷密度) を $\pm\lambda$ としたときに、この導体の電気容量を求めよ.

1.4–7 [**一様帯電球の静電エネルギー**]:

電荷密度 ρ で一様に帯電した半径 a の電荷球の静電エネルギーを求めよ.

1.4–8 [**平板コンデンサーの静電エネルギー**]:

面積 S の二枚の平板導体を距離 d だけ離して，それぞれ電荷 $\pm Q$ を貯めたコンデンサーの静電エネルギーを求めよ.

1.4–9 [**導体球の静電エネルギー**]:

半径 a の導体球に電荷 Q を与えたときの静電エネルギーを求めよ.

2 定常電流による磁場

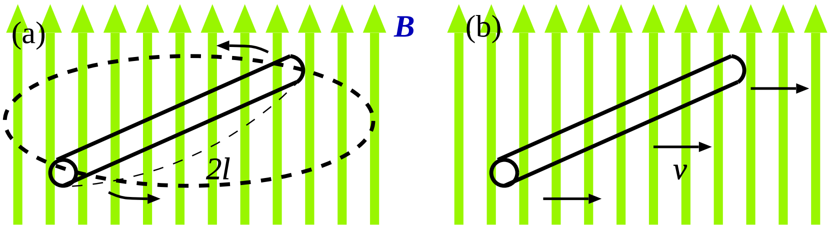
2.1 ビオ・サバールの法則，アンペールの法則

2.1–1 [**ローレンツ力**]:

z 方向に一様な磁場 (大きさを B とする) があり，これに垂直に長さ $2l$ の導線を置いた.

(a) 下左図のように導線の中心を一様な角速度 ω で回転させる．このとき，導線内部にある電荷 q に働く力を求めよ.

(b) 下右図のように導線の磁場に垂直方向に速さ v で平行移動させたときに，導線内部にある電荷 q に働く力を求めよ.



(c) 動く導線の内部の電荷はこの力を受けて導線内部を移動することになる．その結果，導線内部に電場が生じる．電場による力と磁場による力がつりあうまで電荷の移動は起こる．このとき，(a) での導線と中心と両端との間の電位差，(b) での導線の両端の電位差を求めよ．

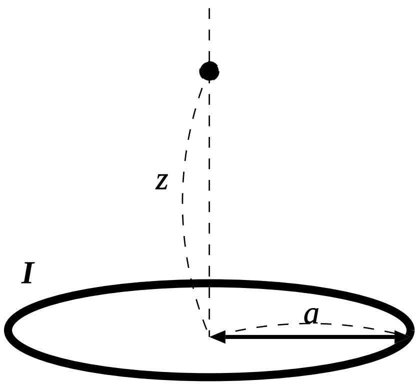
2.1–2 [**直線電流の作る磁場**]:

(a) 一本の直線電流 (大きさ I_1) の作る磁場を求めよ．磁場の大きさと方向を明記し，磁力線を図示せよ．

(b) その電流から距離 l だけ離れた位置に平行にもう一本の直線電流 (大きさ I_2) を置いた．この直線電流間に働く力を求めよ．力の大きさと方向を明記せよ．

(c) 直線電流 I_2 を電流 I_1 に対して垂直になるように回転させた．このときに，直線電流間に働く力を求めよ．

2.1–3 [**円電流による磁場**]:



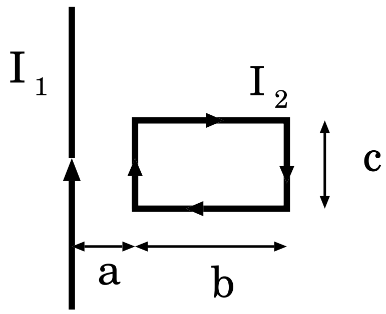
半径 a のリング上を電流 I が流れている．この円電流が中心軸上でリングの中心から距離 z の位置に作る磁場を求めよ．

2.1–4 [**直線電流の間に働く力 (ビオー＝サバールの法則＋ローレンツ力)**]:

(a) 一本の無限に長い導線に電流 I が流れている．その回りに出来る磁場を求めよ．

(b) 距離 r だけ離れた 2 本の平行で無限に長い導線にそれぞれ電流 I_1，I_2 が流れている．この時の導線の受ける力を求めよ．どの場合に引力になるかを考えよ．

(c) 無限に長い直線電流 I_1 から a だけ離れたところに，一辺の長さが b，c の長方形のループに電流 I_2 が流れている．ループが受ける力と直線電流が受ける力を求めよ．



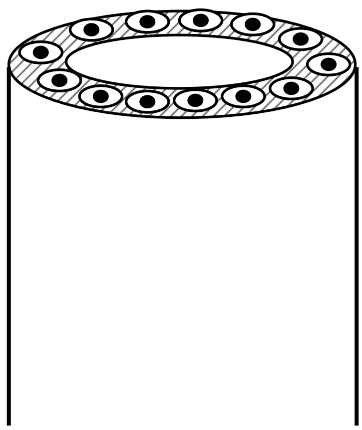
2.1–5 [**アンペールの法則**]:

アンペールの法則を説明せよ．

2.1–6 [**円柱電流の作る磁場**]:

無限に長い半径 a の直線の導線の中に一様な電流 I が流れている．導線の内外での磁場をアンペールの法則を用いて求めよ．

2.1–7 [**アンペールの法則の応用例**]:



半径 a の円筒面を軸方向に一様に流れる電流の作る磁場をアンペールの法則を用いて求めよ．特に，円筒の内側と外側の両方を求めよ．また，解答だけでなく，その考え方，思考過程も説明せよ．

2.1–8 [**同軸ケーブル**]:

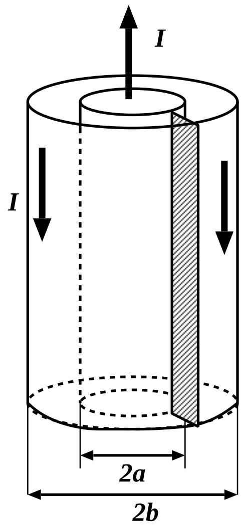
右図に示すような半径が a および b で，長さが l の導線とそれをとりまく円筒形導体からなる同軸ケーブルがある．電流 I は，内側の導体を上向きに流れていて，外側の円筒導体を下向きに帰って来る．この同軸ケーブルの長さ l は十分長く，端の効果は考えなくてよいとする．

(a) 内側の導線に流れる電流は，導線の表面だけに流れると**仮定**する．その時に，同軸ケーブルに流れる電流が作る磁場の方向と大きさを求めよ．

(b) 図中の斜線で囲まれた幅 $(b-a)$，長さ l の長方形を貫く磁場 (磁束) を求めよ．

(c) この同軸ケーブルの自己インダクタンスを求めよ．

(d) 内側の導線の内部に流れる電流についての上の仮定について考えてみる．導線内部を電流が一様に流れている場合，導線の内外に磁場が生じる．もし，電流が増加しようとしたら，電流の一様性は変化する．その様子を理由とともに説明せよ．図を用いて説明してもよい．



2.1–9 [**ソレノイドコイル**]:

半径 a，長さ l の単位長さあたりの巻数 n の細長いソレノイドコイルに電流 I を流した．端の効果は無視できるほど小さいとして，以下の問に答えよ．

(a) ソレノイドの外部で磁場がゼロになることを説明せよ．

(b) ソレノイドの内部での磁場の方向を示せ.

(c) ソレノイドの内部での磁場の大きさが内部の位置に依存しないことを説明せよ.

(d) また，その大きさを求めよ.

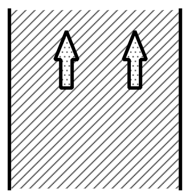
(e) ソレノイドコイルに働く力は縮む方向か伸びる方向か，あるいは曲がる方向か，どちら向きか?理由とともに説明せよ.

3 電磁誘導と Maxwell 方程式

3.0–1 [**交流誘導起電力**]:

面積 S の長方形の回路を一様な磁場 (大きさを B とする) の中で，磁場に垂直な軸の回りに一定の角速度で回転させる．このときの誘導起電力を求めよ.

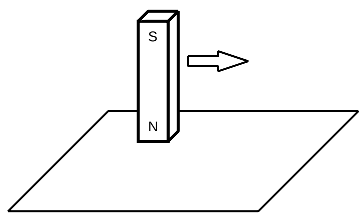
3.0–2 [**電磁誘導と表面電流**]:



半径 a の円柱に電流 I が流れている．そこで，矢印方向に電流変化があるときに，中心部分と表面とどちらに多くの電流が流れるか議論せよ.

3.0–3 [**うず電流**]:

導体板の近くで磁石の N 極を動かすときに，導体板にはどのような電流が流れるか説明せよ．また，その電流は磁石の運動を妨げるか促進するかどちらか?



3.0–4 [**変位電流**]:

距離 d だけ離した面積 S の二枚の平板導体からなるコンデンサーに電流 I を流した．このとき，平板間の変位電流を求めよ.

3.0–5 [**アンペール・マクスウェルの法則**]:

電荷密度を $\rho(x,t)$，電場を $\boldsymbol{E}(x,t)$，電流密度を $\boldsymbol{J}(x,t)$，磁場を $\boldsymbol{B}(x,t)$ とする．また，真空の誘電率を ϵ_0，透磁率を μ_0 とする．静磁場でのアンペールの法則 ($\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{J}$) と電荷の保存則 (連続方程式 $\partial\rho(\boldsymbol{x},t)/\partial t=-\nabla\cdot\boldsymbol{J}$) から、時間変化のある場合のアンペール・マクスウェルの法則を導け.