物理学 (電磁気学) 解答例編

福島孝治 (東大院総合文化)

Ver. 1.0:	2007.10.10	初版
Ver. 1.1:	2007.11.4	1.1 章まで

1 静電場の世界

1.1 電荷の存在・クーロンの法則

1.1–1 [**電荷量**]**:**桁が大きくちがう量を感覚的に理解するには訓練が必要である．ここではその例題として電荷量を考えてみることにする．題意に従って，数値を計算してみると，求める電荷量は，

$$\frac{10[\mathrm{g}]}{63.5[\mathrm{g/mol}]} \times 6.02 \cdot 10^{23}[\mathrm{mol}^{-1}] \times 1.60 \cdot 10^{-19}[\mathrm{C}] \simeq 1.52 \times 10^4[\mathrm{C}]$$

となる．実際には銅からこんな電荷をはぎ取ることは不可能である．下敷をこすって発生できる静電気は高々$10^{-6}C = \mu C$ 程度である．

1.1–2 [**クーロン力**]**:**クーロン力の大きさに関して数値を計算してみる問題である．

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{r^2} = \frac{1}{4 \cdot 3.14 \cdot 8.9 \times 10^{-12}\mathrm{C}^2/\mathrm{Nm}^2}\frac{1\mathrm{C}^2}{1\mathrm{m}^2} \simeq 9.0 \times 10^9\mathrm{N}$$

1Kg の質量に働く地球上での重力の大きさが 9.8[N] であることから，上の力は $9.2{\times}10^8$Kg$= 9.2 \times 10^5$ton の質量に働く重力に相当することがわかる．

1.1–3 [**水素原子でのクーロン力の強さ**]**:** 問題の意図はクーロン力の強さを見てみようということである．単純に数値を入れれば答えは出てくる．古典的力学の範囲では，水素原子は陽子の回りを回転していると考える．二つの距離を r とすると，クーロン力は，

$$\text{クーロン力} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

であり，万有引力は，

$$\text{万有引力} = G\frac{m_p m_e}{r^2}$$

となる．その比は，それぞれ数値を入れれば，

$$\frac{\text{クーロン力}}{\text{万有引力}} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{Gm_p m_e} \simeq 2.2 \times 10^{39} \simeq \frac{1}{4.5 \times 10^{40}} \tag{1}$$

となり，クーロン力が圧倒的に大きいことがわかる．かなり大きな値なので，逆に実感は沸かない．また，このような比較がいいのかどうかもよくわからない．似たような問題として，地球は太陽の回りを公転しているが，ここでは万有引力と遠心力がつり合っている．この公転半径を，万有引力を無くして，クーロン力と遠心力から実現されていると考えたときに，どの位電荷を持たせればよいかを考えてみよう．

1.1–4 [**身近な電磁気力**]**:**

レポート問題なので，解答例は後ほど．

1.1–5 [**電荷の中性**]:問題 **1.1–3** で議論したように，電荷の中性がずれていたときには大きなクーロン力のせいでいろんなスケールでの物質の崩壊が起きているであろう．実際にはそれが起きていないわけで，そこから中性度合を大雑把に評価できる．仮りに，水素原子の陽子と電子の電荷が e と $-e$ が中性から δ だけずれていたとする．つまり，それぞれの電荷が $(1+\delta/2)e$ と $-(1-\delta/2)e$ だとする．水素原子間に働く力は斥力になり，その大きさは $\dfrac{(\delta e)^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ となる．水素原子からなる星が存在するということは，たくさんの水素原子間に働く力は，クーロン力による斥力よりも万有引力による引力の方が大きいはずである．この条件から，

$$\frac{(\delta e)^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} < G\frac{m_e m_p}{r^2} \quad \Longrightarrow \delta < 2.1\times 10^{-20}$$

となる．世の中は中性にできていることがわかる．

1.1–6 [**クーロン力 1**]:

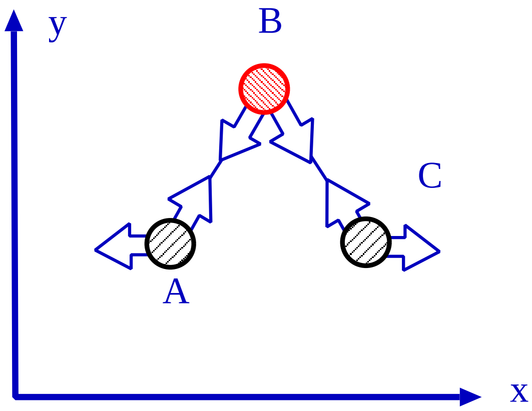
レポート問題なので，解答例は後ほど．

1.1–7 [**クーロン力 2**]:

電場をベクトルとして考える習慣になれることが，この問題の趣旨です．二番は力学の問題として，何が起きるか想像してみようということでした．

1．ベクトルの合成

図のように座標軸をとり，3 つの点電荷をそれぞれ A,B,C と呼ぶことにする．点電荷の間の距離は等しいのでそれぞれの 間に働くクーロン力の大きさは等しく，$F = q\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{a^2}$ となる．A が B から受ける力を $\boldsymbol{F}_{AB}$ と書くことにすると，クーロン力が作用・反作用型の力 ($\boldsymbol{F}_{AB} = -\boldsymbol{F}_{BA}$) であることを考えると，独立な 3 つの力ベクトルはそれぞれ，



$$\boldsymbol{F}_{AB} = \frac{F}{2}\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}, \boldsymbol{F}_{BC} = \frac{F}{2}\begin{pmatrix}1\\ -\sqrt{3}\end{pmatrix}, \boldsymbol{F}_{CA} = F\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix},$$

となり，ベクトルの合成を考えれば，それぞれの点電荷が受ける力は

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F}_A &= \boldsymbol{F}_{AB} + \boldsymbol{F}_{AC} = F\left\{\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{3}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\ 0\end{pmatrix}\right\} = \frac{F}{2}\begin{pmatrix}-1\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}, \\
\boldsymbol{F}_B &= \boldsymbol{F}_{BA} + \boldsymbol{F}_{BC} = F\left\{-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{3}\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ -\sqrt{3}\end{pmatrix}\right\} = F\begin{pmatrix}0\\ -\sqrt{3}\end{pmatrix},
\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{F}_C = \boldsymbol{F}_{CA} + \boldsymbol{F}_{CB} = F\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-\sqrt{3}\end{pmatrix} = \frac{F}{2}\begin{pmatrix}1\\\sqrt{3}\end{pmatrix}\right\}.$$

となることがわかる．

2. 力と運動

さて，力がわかればどちらの向きに動こうとするのかがわかる．そこで，点電荷の固定を外すとどうなるかを考えてみると，まずは点電荷が直線上の並ぶ方向に動こうとするであろう．実際には運動方程式を解いてみたいところであるが，点電荷の質量をあからさまに与えていなかったり，問題の図の棒線が点電荷間の距離を固定しているように思えるので，固定されているかどうかで答え方が異なる．

まず，それぞれの運動量を $\boldsymbol{p}_A, \boldsymbol{p}_B, \boldsymbol{p}_C$ とすると，すぐわかることは，運動方程式

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{p}_A = \boldsymbol{F}_A, \quad \frac{d}{dt}\boldsymbol{p}_B = \boldsymbol{F}_B, \quad \frac{d}{dt}\boldsymbol{p}_C = \boldsymbol{F}_C,$$

から，

$$\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{p}_A + \boldsymbol{p}_B + \boldsymbol{p}_C\right) = \boldsymbol{F}_A + \boldsymbol{F}_B + \boldsymbol{F}_C = \boldsymbol{0}$$

と重心の運動量は保存していることがわかる．これは AB 間や BC 間の距離が固定されているかどうかに依存しない．さて，適当に質量を与えて，運動方程式を解けばいいわけだが，これはちょっと難しいそうな問題である．定性的には，以下のとおりであろう．

点電荷間の距離が固定されていない場合

最初は点電荷は直線上にならぶ方向に動き出すが，両端の点電荷から見た他の点電荷の相対位置は異符号の方が近いので，合力は重心に対して引力が働く．結局は，重心の位置に点電荷が集結する[1]．

点電荷間の距離が固定されている場合

上の設定よりも，自由度が格段に少なくなっているので，簡単である．この場合は，重心に集結することはなく，への字ー直線ーへの字の逆の振動を繰り返すことになる．この時に振動数はクーロン力の形で決まっているはずである．

1.1–8 [2 つの異なる電荷のつくるクーロン電場]:

重ね合わせの原理をつくって，電荷の作る電場を求めてみようというのが，この問題の趣旨である．

正負の電荷の位置をそれぞれ $r_\pm(\pm a/2, 0, 0)$ とする．さて，まず解答に行く前に，ガウスの法則を使って何がわかるかを考えてよう．この二つの電荷を囲むような閉曲面を考えると，ガウスの法則の右辺 (総電荷量) はゼロになる．よって，左辺

[1] 点電荷は “点” なので，衝突は起きないと考えている．

もゼロになるが，これは電場がゼロであることではない．その閉曲面を垂直に出て行く電場の大きさの**総量**がゼロなだけ，つまり出て行く量と入って来る量が同じである．残念ながら，これ以上のことはガウスの法則からはわからない．

1. y 軸上での観測 観測点の座標を $\boldsymbol{x}(0,y,0)$ とする．この点と正負電荷間の距離はどちらも同じであるから，この位置での電場の大きさは同じである．また，電場の y 成分は正負で大きさは同じで方向が逆なので，重ね合わせるとゼロになる．z 成分はないので，x 成分だけ求めればよい．まず，それぞれの電荷が位置$\boldsymbol{x}$に作る電場の大きさ E は，$E=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{y^2+a^2/4}$ であるので，x 成分は,

$$E_x = 2E\frac{a/2}{\sqrt{y^2+a^2/4}} = \frac{qa}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{(y^2+a^2/4)^{3/2}} = \frac{qa}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{y^3}\left(1+\frac{a^2}{4y^2}\right) \simeq \frac{qa}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{y^3}$$

となる．最後に $y \gg a$ の条件より，$(a/y)^2$ は小さいとして無視した．よって，答えは,

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{qa}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{y^3}, 0, 0\right) \tag{2}$$

2. x 軸上での観測 観測点を $\boldsymbol{x}(x,0,0)$ とすると，この場合もやはり x 成分の電場しかない．その値は,

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q}{(x-a/2)^2} - \frac{q}{(x+a/2)^2}\right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{x^2}\left[\left(1-\frac{a}{2x}\right)^{-2} - \left(1+\frac{a}{2x}\right)^{-2}\right] \simeq \frac{aq}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{x^3}.$$

前問と同様に距離の 3 乗に逆比例する形になった[2]．

3. 一般の場合 さて，一般的に距離の逆 3 乗則が成り立っているだろうか．それを確かめるのがここでの問題である．前問と同様にそれぞれの電荷が作る電場を重ね合わせればよいが，ここでは**ずる**をして，電位を経由して求めてみる[3]．それぞれの電荷が持っているクーロン電位を 2 つ重ね合わせることで位置$\boldsymbol{x}(x,y,z)$ での電位 $\phi(\boldsymbol{x})$ を求める．

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{(x-(a/2))^2+y^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+(a/2))^2+y^2+z^2}}\right] \tag{3}$$

位置 $|\boldsymbol{x}|$ が電荷間の距離 a に比べて非常に大きい時にどのようになるかを考える．まずは，$a/x \ll 1$ として，$a/x=0$ の回りでの展開すると,

$$(x\pm(a/2))^2 = x^2\left(1 \pm a/x + O\left((a/2x)^2\right)\right) \simeq x^2 \pm ax$$

[2]点電荷のクーロン電場は $\frac{1}{r^2}$ に比例し，一様に分布した直線電荷の作る電場は $\frac{1}{r^1}$ に，一様に分布した平面電荷の作る電場は $\frac{1}{r^0}$ に比例していた．そして，今回は，2 つの同じ電荷量の点電荷の作る電場は $\frac{1}{r^3}$ になることがわかった．

[3]電位についてはもう少し後で詳しく議論する．

であるから，クーロン電位のそれぞれの項は,

$$((x\pm a/2)^2+y^2+z^2)^{-1/2} \simeq (x^2+y^2+z^2\pm ax)^{-1/2} \simeq \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} \mp \frac{ax/2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

となり，式 (3) は,

$$\begin{aligned}
\phi(\boldsymbol{x}) &\simeq \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{ax}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \\
&\downarrow \text{ ここで，}\quad \boldsymbol{p}=(aq,0,0), \boldsymbol{R}=(x,y,z) \text{ を使えば,} \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{R}}{|\boldsymbol{R}|^3} \qquad (4)
\end{aligned}$$

となる．これは電気双極子と呼ばれている系であり，$\boldsymbol{p}$を電気双極子モーメントと呼ぶ．この電位から電場を求めてみる．$|\boldsymbol{p}|=p=aq$ として,

$$\begin{aligned}
E_x &= -\frac{\partial}{\partial x}\phi = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{R}|^3}-\frac{3x^2}{|\boldsymbol{R}|^5}\right). \\
E_y &= -\frac{\partial}{\partial y}\phi = \frac{p}{4\pi\epsilon_0}\frac{3yx}{|\boldsymbol{R}|^5}, \\
E_z &= -\frac{\partial}{\partial z}\phi = \frac{p}{4\pi\epsilon_0}\frac{3xz}{|\boldsymbol{R}|^5},
\end{aligned}$$

となる．ところで，こんな双極子とは何なのよ．というのは，自然な疑問である．正負の電荷が対で置かれている状況は，導体でない物質に電場をかけたときのミクロな世界で起きていることのモデル化になっている．つまり，導体ならば，自由電子が電場を中和するように再配列できるが，誘電体では電子は物質中を自由に動きまわれず，ミクロな単位 (原子) 内で電場の方向に移動すると考えるわけだ．誘電体では，この電気双極子が沢山つまっている状況を一つのモデルとして考えることができる．また，水分子などの分子構造が対称でない分子も双極子モーメントをもっている．

- **問い：**一様な電場の中に置かれた双極子モーメントはどっちの方向を向だろうか?
- **問い：**双極子モーメントの近くにある別の双極子モーメントはどっちの方向を向だろうか?

これが，電荷を持たず，電気の流れない紙が下敷に引きつけられる理由に近付けるでしょう (か?).

1.1–9 [**球対称な電荷の作る電場**]:

この問題の趣旨は，クーロンの法則と重ね合わせの原理から求まる電場の例を計算してみようということでした．もちろん，ガウスの法則を用いてもよい．一度

積分をしてみると，ガウスの法則に対する感動が５割増し (私的比較) になります．同じ問題を異なる方法で解いてみることは大切なことである．立体角を用いて求めることはできるが，ここではクーロンの法則から積分する方法を示しておきます．

1. まずはそのような状況を作ってみようということだが，これは導体球を用意すれば簡単にできる．ここではピンポン球にアルミをまいてみる．周囲と絶縁したピンポン球に，こすった下敷をくっつけることで，電荷を渡せばよい．ひとたび電荷が帯びると，導体中の電荷は球面に平行な電場が生じないように，電荷の再配置を行う．今は対称性の高い球状なので，電荷は球面上に一様に分布する．

なぜ下敷の電荷がピンポン球の方に移動するかは後からまた考えてみることにしよう．

2．3． 半径 a の球面上に一様な面電荷密度 σ で分布している球殻の作る電場を考える．観測位置を z 軸にとっても一般性を失わない．z 軸に垂直な面と球殻が交わっている円環は観測点との距離が一定の円になっている．

$$\begin{aligned}\text{円環上の総電荷} &= \text{面密度}\sigma \times \text{面積} \\ &= \sigma(2\pi a \sin\theta)(a d\theta)\end{aligned}$$

微小な円環が観測点に作る電場を考える．観測点から円 環を見ると，ある円環上の部分に z 軸に対称な部分が必ず存在することから，z 軸方向以外は対称からキャンセルされてゼロになるので，z 軸方向だけを考えればよい．z 軸との角度が θ となる微小円環の作る電場の z 軸成分を $dE_r(\theta)$ は，

$$dE_r(\theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2\pi a^2\sigma\sin\theta d\theta}{R^2}\frac{r - a\cos\theta}{R}$$

となる．

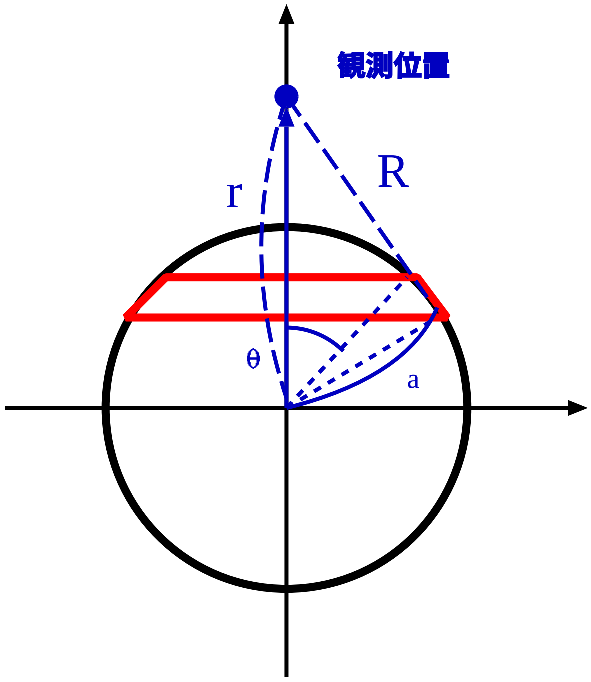


図 1: 一様に帯電した半径 a の球殻

ここで，R は円環と観測点との距離で，

$$R^2 = (r - a\cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta = r^2 - 2a\cos\theta r + a^2$$

そこで全ての円環について積分，すなわち θ を 0 から π まで重ね合わせればよい．

$$\begin{aligned}E_r(r) &= \int_0^\pi dE_r(\theta) = \frac{2\pi\sigma a^2}{4\pi\epsilon_0}\int_0^\pi d\theta\sin\theta\frac{r - a\cos\theta}{(r^2 - 2a\cos\theta r + a^2)^{3/2}} \qquad (5)\\ &\downarrow \quad (\text{変数変換} : 2RdR = 2ar\sin\theta d\theta)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\downarrow \quad \left(a\cos\theta = \frac{1}{2r}\left(r^2+a^2-R^2\right)\right)\\
&= \frac{\sigma a^2}{2\epsilon_0}\int_{|r-a|}^{r+a}\frac{RdR}{ar}\frac{r-\frac{1}{2r}\left(r^2+a^2-R^2\right)}{R^3} = \frac{\sigma a}{2\epsilon_0}\int_{|r-a|}^{r+a}dR\frac{1}{R^2}\left(1-\frac{r^2+a^2-R^2}{2r^2}\right)\\
&\downarrow \quad \left(\frac{1}{R^2}\left(1-\frac{r^2+a^2-R^2}{2r^2}\right) = \frac{r^2-a^2+R^2}{2r^2R^2} = \frac{1}{2r^2}\left(1+\frac{r^2-a^2}{R^2}\right)\right)\\
&= \frac{\sigma a}{4\epsilon_0 r^2}\int_{|r-a|}^{r+a}dR\left(1+\frac{r^2-a^2}{R^2}\right) = \frac{\sigma a}{4\epsilon_0 r^2}\left(R-\frac{r^2-a^2}{R}\right)\Bigg|_{|r-a|}^{r+a}\\
&= \frac{\sigma a}{4\epsilon_0 r^2}\underline{\left[r+a-\frac{r^2-a^2}{r+a}-|r-a|+\frac{r^2-a^2}{|r-a|}\right]}\\
&\qquad \text{下線部} = \begin{cases} 2a-(a-r)-(r+a)=0 & \text{for r>a}\\ 2a-(r-a)+(r+a)=4a & \text{for r<a}\end{cases}\\
&= \frac{\sigma a^2}{\epsilon r^2}\theta(r-a)
\end{aligned}
\tag{6}
$$

ここで，$\theta(x)$ はステップ関数で $x>0$ の時に 1，$x<0$ の時に 0 をとる．

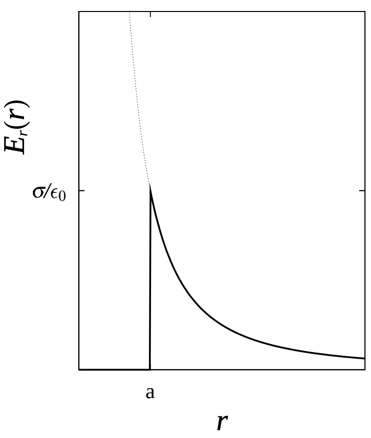


図 2: 電場の動径成分を原点からの距離の関数としてグラフにする

- 球内はどこでも電場が 0 になっている．
- 球の外では，球殻上の総電荷量 $4\pi a^2\sigma$ が原点に集まっている場合と同じ．

この結果はガウスの法則から，(当然) 求めることもできる．任意の閉曲面として，原点を中心とする球を考えて，ガウスの法則から，電場は <u>動径成分 E_r しか無く，角度に依存しない</u> とすれば，

$$\int_{\text{球面}} dSE_r = 4\pi r^2 E_r \frac{\text{球内の電荷}}{\epsilon} = 0$$

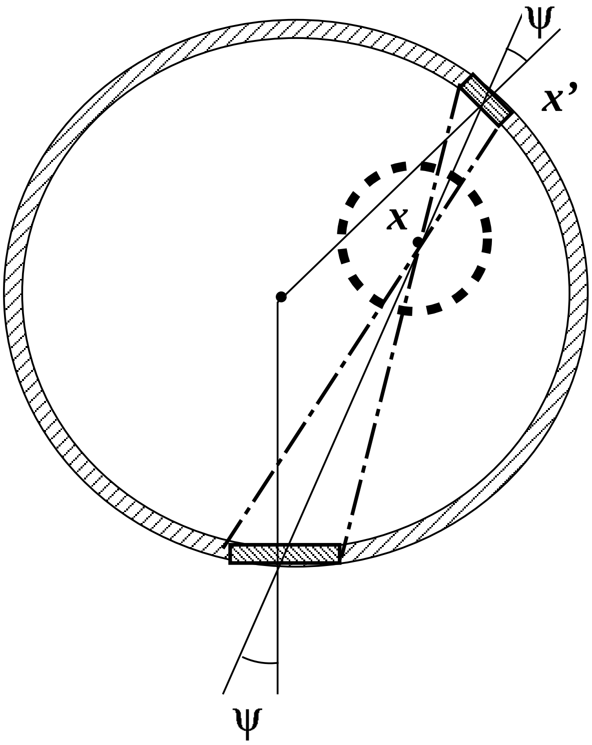
から，すぐに $E_r = 0$ が言えます．

しかし，下線部の仮定は実際に示せるだろうか？不思議な感じがして，ちょっと自明ではないと思うが，立体角の考え方からみればとても自然な感じがする．

<u>おまけ</u> 立体角を用いて，球殻内部に電場がないことを再考してみる．球殻内部の任意の位置ベクトル $\boldsymbol{x}$ での電場は，クーロンの法則より，

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\int dS'\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x'}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x'}|^3} = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\int d\Omega\frac{1}{\cos\psi}\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x'}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x'}|}$$

となる．



ここで立体角の式，$d\Omega = \dfrac{\cos\psi}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^2}dS'$ を用いて，球殻の表面の積分を立体角の積分に変換した．この積分は，立体角に関して $\frac{1}{\cos\psi}\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}$ を積分するが，$\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}$ は単位ベクトルであり大きさは 1 であることに注意すると，観測点からみて全ての方向に関して $\frac{1}{\cos\psi}$ を積分すればよいことがわかる．さらに，ある方向 $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'$ と反対の方向 $-\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}'$ が必ず存在するが，球の性質より，$\cos\psi(\boldsymbol{x}) = \cos\psi(\boldsymbol{x}')$ であることがわかるので，積分はいつでもゼロであることがわかる．ここでの議論は，ベクトルの各成分がゼロであることを示している．

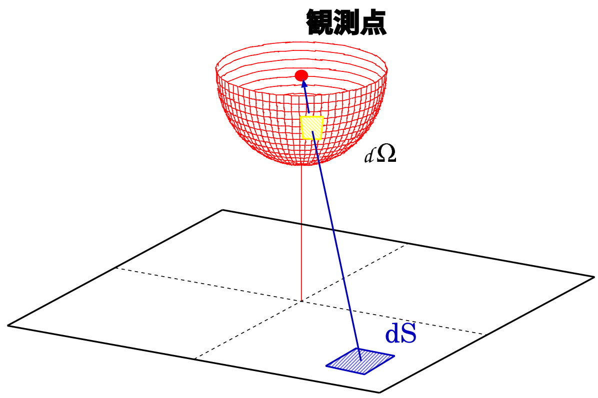
1.1–10 [**一様平面電荷の作る電場**]: この問題もクーロンの法則を積分することで電場を求めることはできるが，ここでは立体角の考え方を使うことで，その概念を良く理解することにする．立体角とは単位球上での見込む角度のことである．この考え方はたびたび便利なことがある．

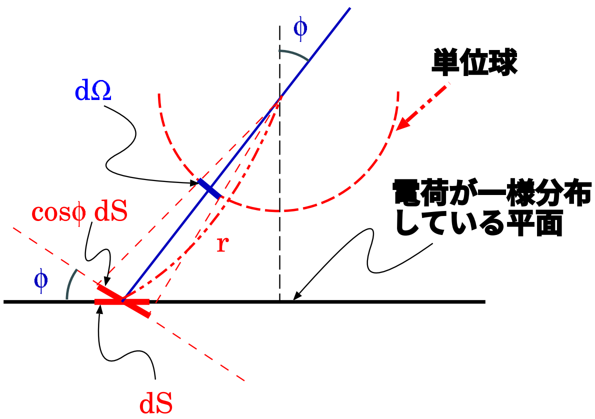
まず，対称性から電場の平面に水平成分はキャンセルするので、垂直成分 E_z のみを考える。

観測点から距離 r にある平面上の面積要素 dS が作る電場 dE_z は、

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\sigma\cos\phi}{r^2}dS \tag{7}$$

ここで、σ は電荷の面密度で、ϕ は観測点からの面積要素の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ と平面となす角度である。面積要素 dS からの寄与を観測点から見たときに、平面全体の積分を単位球上の積分に置き換えてみる (右の図のように)。





面積要素が観測点に対して張る立体角 $d\Omega$ は、観測点を中心とする単位球上の面積要素 dS を見込む表面積である。また、面積要素 dS を通る観測点を中心とする球上への dS の射影 dS' は、$dS' = \cos\phi dS$ と表される。面積要素 dS と立体角の関係は、

$$1 : r^2 = d\Omega : \cos\phi dS$$

であることから、

$$dS = \frac{r^2}{\cos\phi} d\Omega \tag{8}$$

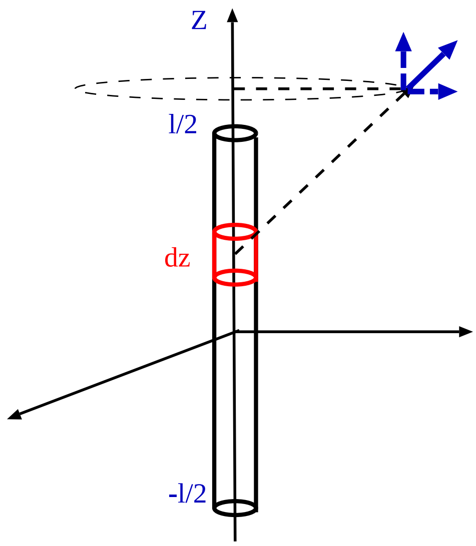
となる。

平面全体の寄与は、

$$E_z = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\int_{\text{平面全体}} \frac{\cos\phi}{r^2} dS = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\int_{\text{単位半球}} d\Omega = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} 2\pi 1^2 = \frac{\sigma}{2\epsilon} \tag{9}$$

1.1–11 [**一様に帯電した直線電荷の作る電場**]:

右図のように，長さ l の直線上に一様な線密度 λ で分布している電荷の作る電場を求める．ここでは，円柱座標系を用いるとよい．線要素 dz の持つ電荷 λdz が位置 (ρ, ϕ, z) に作るクーロン場を $-l/2$ から $l/2$ まで重ね合わせればよい．電場の動径方向，角度方向，鉛直方向の成分をそれぞれ E_ρ, E_ϕ, E_z とする．クーロン場の性質より，$E_\phi = 0$ となることがわかるので，残りの 2 つをそれぞれ求めることにする．



動径成分：E_ρ

$$\begin{aligned}
E_\rho &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{-l/2}^{l/2} dz' \frac{\lambda(\rho - 0)}{(\rho^2 + (z - z')^2)^{3/2}} \\
&\downarrow \quad (z - z' = \xi \quad \text{と置く.}) \\
&= \frac{\lambda\rho}{4\pi\epsilon_0}\int_{z-l/2}^{z+l/2} d\xi \frac{1}{(\rho^2 + \xi^2)^{3/2}} = \frac{\lambda\rho}{4\pi\epsilon_0} \left. \frac{\xi}{\rho^2(\rho^2 + \xi^2)^{1/2}} \right|_{z-l/2}^{z+l/2} \\
&= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\rho}\left[\frac{z + l/2}{\sqrt{\rho^2 + (z + l/2)^2}} - \frac{z - l/2}{\sqrt{\rho^2 + (z - l/2)^2}}\right]
\end{aligned} \tag{10}$$

この積分はチェックしておこう．

鉛直成分：E_z

$$
\begin{aligned}
E_z &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{-l/2}^{l/2} dz'\lambda\frac{z-z'}{(\rho^2+(z-z')^2)^{3/2}} \\
&= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_{z-l/2}^{z+l/2} d\xi\frac{\xi}{(\rho^2+\xi^2)^{3/2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left(-\frac{1}{(\rho^2+\xi^2)^{1/2}}\right)\Bigg|_{z-l/2}^{z+l/2} \\
&= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left[-\frac{1}{\sqrt{\rho^2+(z+l/2)^2}}+\frac{1}{\sqrt{\rho^2+(z-l/2)^2}}\right] \qquad (11)
\end{aligned}
$$

(a) l が小さい極限 ($l \to 0$) の時に，電荷分布は点電荷のようにみえるはずである．そうなることを確かめよ．もっとも，式 (10)，(11) 中の l を 0 と置いてはどちらも 0 になってしまう．そこで，全電荷量 $l\lambda = Q$ を一定にして，$l \to 0$ の極限をとってみる．まずは，E_z について考えるが，l が十分小さいときにテーラー展開を使って，

$$
rho^2+(z\pm l/2)^2 = \rho^2+z^2\left(1\pm\frac{l}{2z}\right) \simeq \rho^2+z^2\left(1\pm\frac{l}{z}\right) = \rho^2+z^2\pm lz
$$

であることから，

$$
\left(\rho^2+(z\pm l/2)^2\right)^{-1/2} \simeq \left(\rho^2+z^2\pm lz\right)^{-1/2} \simeq (\rho^2+z^2)^{-1/2}\left(1\mp\frac{lz}{2(\rho^2+z^2)}\right)
$$

である．これを用いて，$l \to 0$ で残る部分は

$$
\begin{aligned}
E_z &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{l}\left[\frac{1}{\sqrt{\rho^2+(z-l/2)^2}}-\frac{1}{\sqrt{\rho^2+(z+l/2)^2}}\right] \\
&\simeq \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{l}\left[\frac{lz}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}\right] = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{z}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}\right]
\end{aligned}
$$

となる．ρ は z 軸からの距離であり，$\rho^2 = x^2+y^2$ であることに注意すると，上の式はクーロンの法則に他ならないことがわかる．横成分である E_ρ についても同様に示すことができる．

(b) 線が無限に長い場合は以下のようになることを示せ．

$$
\begin{aligned}
E_z &= 0 \qquad (12) \\
E_\rho &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\rho} \qquad (13)
\end{aligned}
$$

1.1–12 [クーロン場の発散]:

クーロン電場の場合の性質をチェックする過程で，ベクトル演算の練習をしようというのが，この問題の趣旨．式どおりできれば，示すことができる．

発散

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &= \frac{\partial}{\partial x}E_x + \frac{\partial}{\partial y}E_y + \frac{\partial}{\partial z}E_z \\
\downarrow \quad & \frac{\partial}{\partial x}E_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \quad (\Leftarrow r^2 = x^2+y^2+z^2) \\
\downarrow \quad & = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \frac{x(-3/2)2x}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{r^2-3x^2}{r^5} \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{r^2-3x^2}{r^5} + \frac{r^2-3y^2}{r^5} + \frac{r^2-3z^2}{r^5}\right) \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{3r^2-3(x^2+y^2+z^2)}{r^5} = 0
\end{aligned}
$$

原点 $r=0$ 以外ではゼロになっていることが示された[4].

回転: x 成分について書き下してみる.

$$
\begin{aligned}
(\nabla \times \boldsymbol{E})_x &= \frac{\partial}{\partial y}Ez - \frac{\partial}{\partial z}Ey = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right) \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{-3yz}{r^5} - \frac{-3yz}{r^5}\right) = 0
\end{aligned}
$$

y, z 成分も同様である．ここでも，原点では発散しているが，それ以外ではゼロになっていることが示された．この物理的な意味は後で議論する.

1.1–13 [**ベクトルの性質**]**:**これは電場に限定されずに一般的なベクトルの性質であるが，各成分をあからさまに代入して計算すれば示すことが出来る.

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \\
&= \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial y} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

ほとんどベクトル積の定義が分かれば出来るはず．この関係式は次の問題でも使われる.

1.2 電場とガウスの法則

1.2–1 [**ガウスの法則の例題**]**:1.1-9**, **1.1-10**, **1.1-11** をガウスの法則を使って再考せよ.

[4] ガウスの法則との関係はどうなっているのだろうか?