

1.2 電場とガウスの法則

1.2-1 [ガウスの法則の例題]:1.1-9, 1.1-10, 1.1-11 をガウスの法則を使って電場を求めてみる。

球殻電荷のつくる電場

電荷が球対称なので、電場も球対称である。つまり、電場の大きさは中心からの距離にのみ依存し、方向は動径方向である。その大きさを E_r とする。ガウスの閉曲面を半径 r の同心球とする。その球面上で電場の大きさは一定で、 E_r であり、その方向は球面に垂直である。つまり、このガウスの閉曲面で選んだ球面の法線ベクトルと平行である。 r と電荷球の半径 a の大小関係でガウスの法則の右边が変わることに注意して、ガウスの法則を使うと、

$$\int_{\text{球面}} dS \mathbf{n} \cdot \mathbf{E} = E_r \int dS = E_r 4\pi r^2 = \int_{\text{球}} dV \frac{\rho}{\epsilon_0} = \begin{cases} \frac{4\pi a^2 \sigma}{\epsilon_0} & \text{for } r > a \\ 0 & \text{for } r < a \end{cases}$$

であるから、求める電場 E_r は $E_r = \frac{\sigma a^2}{\epsilon_0 r^2} \theta(r - a)$ である。これは、1.1-9 の式 (6) と一致している。

平面電荷のつくる電場

これはレポート問題なのでヒントをあげておくことにする。

- (a) 電場の方向はどちら向き?
- (b) 電場の大きさは何に依存する?
- (c) ガウスの閉曲面は電場の方向と平行か垂直になるように選ぶのがよい。

直線電荷のつくる電場

簡単のために、電荷は λ を線密度とする無限に長い直線電荷とする。直線電荷を z 軸にとると、 z 軸を中心に回転対称性がある。つまり、どこに x 軸、 y 軸をとっても同じように見える。さらに、 z 軸のどの値の平面もやはり同じに見える。このことから、電場の大きさ E_r は z 軸から距離だけの関数で、その方向は動径方向であることがわかる。

ガウスの法則で使う閉曲面は z 軸を中心とした半径 r の円柱をとることにする。 z 軸方向の高さは l とする。円柱の上下の蓋の部分の法線ベクトルは z 軸に平行であるが、電場はそれと垂直な動径方向であるので ($\mathbf{n}_{\text{上下の蓋}} \cdot \mathbf{E} = 0$)、ガウスの法則への寄与はない。一方で、側面ではいつでも面の法線ベクトルとは平行である ($\mathbf{n}_{\text{側面}} \cdot \mathbf{E} = E_r$)。これらに注意して、ガウスの法則を使うと、

$$\int_{\text{円柱の面}} dS \mathbf{n} \cdot \mathbf{E} = \int_{\text{側面}} E_r dS = E_r 2\pi r l = \int_{\text{円柱内}} dV \frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{\lambda l}{\epsilon_0}$$

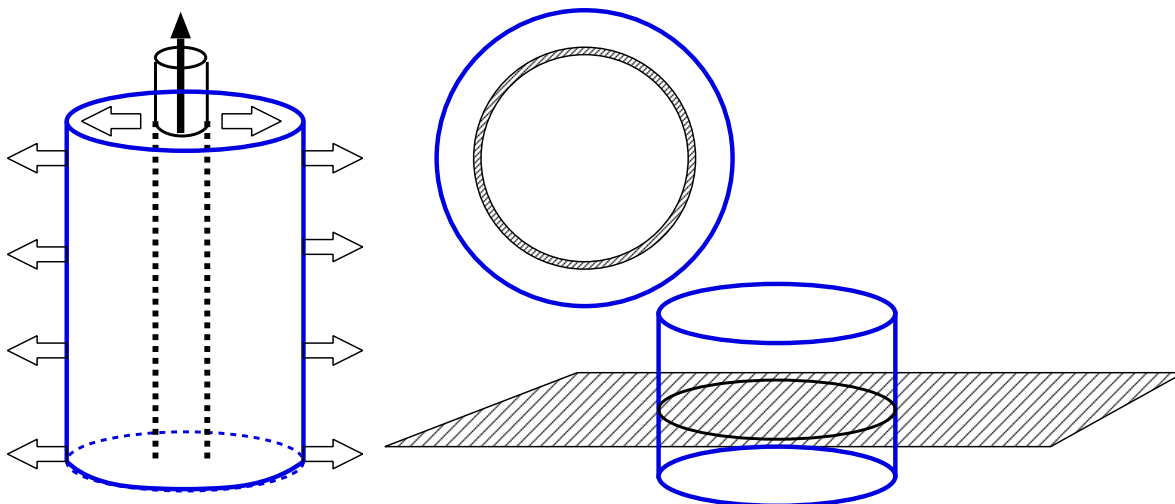


図 3: ガウスの法則で使う閉曲面の例

であるから，求める電場 E_r は $E_r = \frac{\lambda a^2}{2\pi\epsilon_0 r}$ である．もちろんこれは 1.1-11 の式 (13) と一致している．

1.2-2 [平板電荷の電場について]: レポート問題なので，解答例は後ほど．

1.2-3 [二枚の平板電荷]: レポート問題なので，解答例は後ほど．

1.2-4 [一様に帯電している円柱の作る電場]: この問題ではガウスの法則の使い方に対する注意を与えるのが主な趣旨である．(1) どんな閉曲面を選んだのか，(2) それぞれの面での積分の寄与はどうなっているか，を注意して考えたい．

(a) 簡単のために円柱は無限に延びていることにする．円柱の対称性のために，電場の動径方向⁷以外の成分は全てキャンセルしている．電場の動径成分は中心軸からの距離だけの関数になっているので，それを $E_r(x)$ とする．円柱に平行な半径 r ，高さ l の筒を閉曲面として選ぶと，その側面での E_r は全て同じ値を持っている．また，筒の上面と下面に垂直な電場は存在していないので，そこからの寄与はない．ここでガウスの法則より，

$$\int dS \mathbf{n} \cdot \mathbf{E} = 2\pi r l E_r = \int dV \frac{\rho}{\epsilon_0} = \begin{cases} \frac{l\pi r^2 \rho}{\epsilon_0} & \text{for } r \leq a \\ \frac{l\pi a^2 \rho}{\epsilon_0} & \text{for } r \geq a \end{cases}$$

となり，まとめると，

$$E_r = \begin{cases} \frac{r\rho}{2\epsilon_0} & \text{for } r \leq a, \\ \frac{a^2\rho}{2r\epsilon_0} & \text{for } r \geq a \end{cases} \quad (14)$$

⁷中心から放射状に向く方向

円柱の外から見た答えは，全ての電荷を中心線上に集中し，線密度 $\lambda = \pi a^2 \rho$ の作る電場

$$E_r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

と同じと見ることも出来る．

(b) 空洞を作るということは反対電荷の円柱を埋め込むと考えることができる．そこで，反対符号の電荷密度を持った半径 b を円柱を前問の円柱に埋め込む状況を考える．前問の答えから，一様な電荷密度 $-\rho$ をもった円柱の作る電場 E'_r は，

$$E'_r = \begin{cases} -\frac{r\rho}{2\epsilon_0} & \text{for } r \leq b \\ -\frac{b^2\rho}{2r\epsilon_0} & \text{for } r \geq b \end{cases} \quad (15)$$

となる．

重ね合わせの原理より，式 (14)，(15) を足せばよく，

$$E_r^{\text{tot}} = \begin{cases} 0 & \text{for } r \leq b \\ -\frac{b^2\rho}{2r\epsilon_0} + \frac{r\rho}{2\epsilon_0} & \text{for } b \leq r \leq a \\ -\frac{b^2\rho}{2r\epsilon_0} + \frac{a^2\rho}{2r\epsilon_0} = \frac{\rho}{2r\epsilon_0}(a^2 - b^2) & \text{for } r \geq a \end{cases} \quad (16)$$

が得られる．重ね合わせの原理は，存在する電荷にだけでなく，このような架空の電荷についても成り立っているが，電場の大きさについてではなく，ベクトルの重ね合わせであることに注意が必要である．

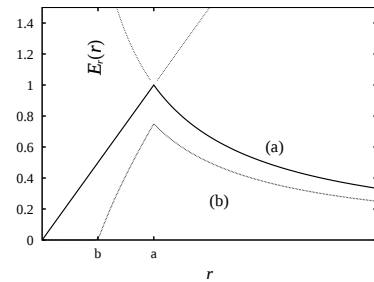


図 4: 電場の動径成分 E_r の r 依存性．縦軸の単位は， $a\rho/(2\epsilon_0)$ ．(a) と (b) の結果をそれぞれ示してある．

もちろん，最初からガウスの法則を用いることで，(a) と同様に得られるが，このように重ね合わせの原理を使うと次の問題が考えやすい．

(c). ここでは円柱が同心円柱でなくなった場合に，くりぬいた部分がどのようになるかを考察してみる．以下では典型的な (誤) 解答例を示す．

「円柱の外から見ると，その内部にある総電荷量は (b) と同じなので，電場も (b) と同じである．」

ガウスの法則の右辺は穴がずれていても，外から見ている限りはいつでも同じである．しかしながら，この解答は左辺について誤解している．左辺は， $\int dS \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}$ であるが，もはや対称性がないので，例えば筒型の閉曲面を選んだときに，その面の法線ベクトル $\mathbf{n}$ と電場 $\mathbf{E}$ は平行ではなく，また筒の場所にも依存するので，この積分を評価することは難しい．

「くりぬいた部分の中に閉曲面を考えると，その中には電荷は無いので，電場がゼロであることがわかる．」

ここではガウスの法則の右辺は正しく評価されていて，ゼロであるが，左辺は電場の沸き出し総量なので，それがゼロであることしかわからない．出入りがゼロであるだけであって，出て行く量あるいは入ってくる量がゼロであることはわからない．

「対称性がずれてしまったので，ガウスの法則は使えない．」

これはある意味で正しい．ただ，重ね合わせの原理を使うことを考えると，円柱とくりぬくべき円柱のそれぞれは綺麗な対称性を持っている．それぞれの作る電場をガウスの法則で求めておいて，重ね合わせることにはできる．

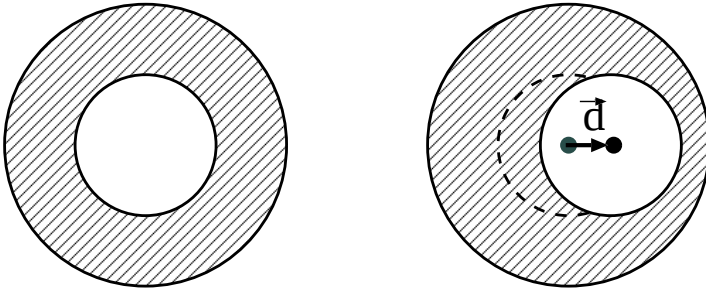


図 5: 円柱を上から見た図．同心円になっている場合 (左) とベクトル d だけずれている場合 (右)

さて，重ね合わせの原理を用いて，具体的に電場を求めてみることにする．原点を半径 a の円柱の中心にとり，(a) の結果をベクトルで表せば，

$$E_a(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{|\mathbf{x}|\rho}{2\epsilon_0} \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \mathbf{x} & \text{for } |\mathbf{x}| \leq a \\ \frac{a^2\rho}{2|\mathbf{x}|\epsilon_0} \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} = \frac{a^2\rho}{2\epsilon_0} \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^2} & \text{for } |\mathbf{x}| \geq a \end{cases} \quad (17)$$

である．くりぬいた円柱の中心のずれベクトルを d とすると，同様に式 (15) は，

$$E_b(\mathbf{x}) = \begin{cases} -\frac{\rho}{2\epsilon_0}(\mathbf{x} - d) & \text{for } |\mathbf{x} - d| \leq b \\ -\frac{b^2\rho}{2\epsilon_0} \frac{\mathbf{x} - d}{|\mathbf{x} - d|^2} & \text{for } |\mathbf{x} - d| \geq b \end{cases} \quad (18)$$

となる．これらを重ね合わせればよい．

$$E_{\text{tot}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{\rho}{2\epsilon_0} \mathbf{x} - \frac{\rho}{2\epsilon_0}(\mathbf{x} - d) = \frac{\rho}{2\epsilon_0} d & \text{for 円柱の内部でかつ空洞の中} \\ \frac{\rho}{2\epsilon_0} \mathbf{x} - \frac{b^2\rho}{2\epsilon_0} \frac{\mathbf{x} - d}{|\mathbf{x} - d|^2} & \text{for 円柱の内部でかつ空洞の外} \\ \frac{a^2\rho}{2\epsilon_0} \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^2} - \frac{b^2\rho}{2\epsilon_0} \frac{\mathbf{x} - d}{|\mathbf{x} - d|^2} & \text{for 円柱の外部でかつ空洞の外.} \end{cases} \quad (19)$$

もはや，空洞の内部で電場がゼロとはなり得ないことはわかったであろう．しかしながら少し驚いたのは，空洞内の電場がずれベクトル d に比例して，しかも一

定であることである．空洞内で一定なベクトルであれば，空洞内に筒状の閉曲面を考えると，その面についてのわきだし量はゼロになることは確かに示すことができる．

1.2-5 [ガウスの法則だけから電場のルールが全て決まらないこと]:

この問題は，ガウスの法則とクーロンの法則が完全に一致しているわけではないことを議論している．まずは，数学の問題から示そう．ガウスの法則を満たす電場 E に適当なベクトル場 A の回転 $\nabla \times A$ を加えたベクトル場 E' の発散は，

$$\nabla \cdot E' = \nabla \cdot (E + \nabla \times A) = \frac{\rho(x)}{\epsilon_0} + \nabla \cdot (\nabla \times A)$$

となる．ここで最後の式の第二項は問題 2 よりゼロになることがわかっているから，このベクトル場 E' もガウスの法則を満たしていることがわかる．すなわち，ガウスの法則を満たすベクトル場を一つ見つけてくると，それに好きなベクトル場の回転を加えることで，いくらでもガウスの法則を満たす場を作ることができることになり，一意的に決定することはできない．偽物の電場ベクトルをいくらでもつくることができてしまうことになる．このことから，ガウスの法則がクーロンの法則の全ての性質をもっているわけではないことがわかる．これはどういうことなのか．

少し考えてみると，クーロンの法則は重ね合わせの原理と合わせることで，電荷がある場合に電場を与えてくれる法則である．電場はベクトルであるから，3つの成分を持っている．一方で，ガウスの法則はスカラーの恒等式になっている．結局は，3つの未知の変数に対して，1つの方程式(ガウスの法則)しかわかっていないために，全ては決定できないということになっているわけである．

ここで，すぐに幾つかの素朴な疑問が浮かぶであろう．例えば，すぐ後に見るように，ガウスの法則を用いて電場を求めることができる例がある．あるいは，講義で示した例題でも，ガウスの法則だけから，電場を計算してみせた．これはなぜだろうか．

では，残された条件はどこかと言えば，クーロンの法則で決まる電場にその性質が残されているわけだが，その条件式は $\nabla \times E = 0$ である．この関係式は実際に 1.1-12 の式から確かめることが出来る．この続きは次の問題で考えることにする．

1.2-6 [ガウスの法則と渦無しの法則から ...]:

講義では大急ぎでしゃべったところだが，練習問題の解答例としてまとめておく．問題は，

$$\nabla \cdot E = \rho/\epsilon_0 \quad (20)$$

$$\nabla \times E = 0 \quad (21)$$

これらからクーロンの法則が出てくるか，あるいは， $E = (E_x, E_y, E_z)$ が決まるか，というのが問いである．少し難しい問題なので，以下では簡便版の答えを示すことにする．まず，知りたい変数が3つで，決めるべき条件式が4つあるようにみえる．そうだとすれば，条件が多すぎるような気がするが，2つの式を合わせると $\nabla \cdot (\nabla \times E) = 0$ はどのような E に対しても成り立つために，実は4つの条件は独立ではなく，この恒等式の方だけ条件は一つ減っていることになる．結果として，ちょうど3つの自由度が残っている．

さて，式(22) から，ポテンシャル ϕ を定義できることは講義で示した．

$$E(x) = -\nabla\phi(x) \quad (22)$$

そして，このポテンシャルを式(22) に代入することで，ポテンシャルの満たすべき方程式(ラプラス方程式) が

$$\nabla \cdot (-\nabla\phi(x)) = -\nabla^2\phi(x) = \frac{\rho(x)}{\epsilon_0} \quad (23)$$

出てくる．この方程式の特解が，クーロン電位になると話して，それを確かめることを宿題にしておいた⁸．ここではそれを具体的に示してみる．電荷が連続に分布している場合のクーロン電位は，

$$\phi(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \frac{\rho(x')}{|x - x'|} \quad (24)$$

である．これが式(24) の解になっていることを確かめる．

$$\begin{aligned} -\nabla^2\phi(x) &= -\nabla^2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \frac{\rho(x')}{|x - x'|} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \rho(x') \nabla^2 \frac{1}{|x - x'|} \\ &\downarrow \left(\text{ここで } \nabla^2 \frac{1}{|x - x'|} = -\nabla \cdot \frac{(x - x')}{|x - x'|^3} = \nabla' \cdot \frac{(x - x')}{|x - x'|^3} \right) \\ &\downarrow \left(\text{ここで } \nabla' \text{ は } x' \text{ での偏微分} \right) \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \rho(x') \nabla' \cdot \frac{(x - x')}{|x - x'|^3} \\ &\downarrow \text{ また，下線部は練習問題 1.1-12 で示したように } x' \neq x \text{ では } 0 \text{ である．} \\ &\downarrow \text{ 積分に寄与があるのは } x' = x \text{ だけなので，その } x \text{ 近傍の半径 } a \text{ の積分を考える．} \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \rho(x) \int_{x' \text{ 近傍の微小球}} d^3x' \nabla' \cdot \frac{(x - x')}{|x - x'|^3} \\ &\downarrow \text{ ガウスの定理と立体角の計算をすると，} \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \rho(x) \int_{x' \text{ 近傍の微小球面}} dS' n \cdot \frac{(x - x')}{|x - x'|^3} \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \rho(x) (-4\pi a^2) \frac{a}{a^3} = \frac{\rho(x)}{\epsilon_0} \end{aligned} \quad (25)$$

⁸これを解くには技術がいるが，確かめることは比較的容易である．

このポテンシャルから電場を求めると，クーロンの法則になる．後は，これが無限遠で 0 になる条件を加えて，唯一の解であることを示せばよいですね．それはみなさんやってみましょう．

1.2-7 [ベクトル場の演算]:ベクトル場の微分の練習問題です．

(1) ベクトル場 $\mathbf{A}$ の発散 ($\text{div } \mathbf{A}$)

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 6xy - 2xz + 3xz^2.$$

(2) ベクトル場 $\mathbf{A}$ の回転 ($\text{rot } \mathbf{A}$)

$$\begin{aligned} (\nabla \times \mathbf{A})_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = 0 + 2xy \\ (\nabla \times \mathbf{A})_y &= \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = 0 - z^3 \\ (\nabla \times \mathbf{A})_z &= \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = -2yz - 2 \cdot 3x^2 \end{aligned}$$

$$\text{これらをまとめると, } \nabla \times \mathbf{A} = (2xy, -z^3, -2yz - 6x^2).$$

(3) ベクトル場 $\mathbf{A}$ の発散の勾配: $\text{grad}(\text{div } \mathbf{A})$

$$\nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) = \nabla (6xy - 2xz + 3xz^2) = (6y - 2z + 3z^2, 6x, -2x + 6xz).$$

1.2-8 [ガウスの定理の練習]:

数学の定理であるガウスの定理

$$\int dV \nabla \cdot \mathbf{A} = \int dS \mathbf{n} \cdot \mathbf{A}$$

を実感するための練習問題である．本来は両辺のうちの計算しやすいのが実際的な使い方であるが，ここでは両辺それぞれを計算して，等式が成り立つことを確かめてみる．

まずは左辺から計算する． $\nabla \cdot \mathbf{A} = x + y + z$ であるから，

$$\int dV \nabla \cdot \mathbf{A} = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz (x + y + z) = 3 \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz x = \frac{3}{2}$$

となる．ここで，2 式から 3 式への移行は x, y, z の入れ換え対称性から， $(x + y + z)$ のどの項も同じ値をとることを使った．

一方，右辺は，全部で 6 つの面での積分がある．それぞれに分けて計算する．

$$\int dS \mathbf{n} \cdot \mathbf{A} = \int_{x=1 \text{ の面}} dydz (1, 0, 0) \cdot \mathbf{A} + \int_{x=0 \text{ の面}} dydz (-1, 0, 0) \cdot \mathbf{A}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{y=1 \text{ の面}} dx dz(0, 1, 0) \cdot \mathbf{A} + \int_{y=0 \text{ の面}} dx dz(0, -1, 0) \cdot \mathbf{A} \\
& + \int_{z=1 \text{ の面}} dx dy(0, 0, 1) \cdot \mathbf{A} + \int_{z=0 \text{ の面}} dx dy(0, 0, -1) \cdot \mathbf{A} \\
& = \int_{x=1 \text{ の面}} dy dz xy + \int_{x=0 \text{ の面}} dy dz(-xy) + \int_{y=1 \text{ の面}} dx dz yz \\
& + \int_{y=0 \text{ の面}} dx dz(-yz) + \int_{z=1 \text{ の面}} dx dy zx + \int_{z=0 \text{ の面}} dx dy(-zx) \\
& = 3 \int_{x=1 \text{ の面}} dy dz xy = 3 \int_0^1 dy \int_0^1 dz y = \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

最後の行では対称性と $x = 1$ の面であることから $x = 1$ を代入した．確かに右辺 = 左辺であることが確かめられた．

1.2-9 [ストークスの定理]:

このストークスの定理はガウスの定理と並んで，ベクトル場を解析する上でよく使われる定理である．ベクトル場 $\mathbf{A}$ の回転 (rot) について一般に成り立つストークス定理は，

$$\int_S \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) dS = \int_C d\mathbf{x} \cdot \mathbf{A} \quad (26)$$

である．

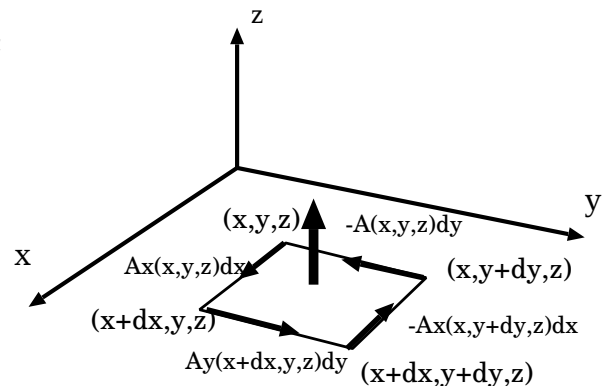
- 右辺は，ある閉曲線 C についてのベクトル場の線積分である．
- 左辺の被積分関数には，微分演算子ナブラ ∇ とベクトル場 $\mathbf{A}$ とのベクトル積であり，これはベクトル場の回転 (rotation) と呼ばれている．その積分は閉曲線 C で囲まれた閉じた曲面での面積分であり，被積分関数はベクトル場の回転と面上での法線ベクトルとの内積である．

簡易版の証明を示す．ガウスの定理の証明でも行ったように，左辺から右辺が出て来る様子を見ることにする．まず，簡単のために xy 平面に平行な微小な面を考える．面積要素を $dS = \Delta x \Delta y$ とすると，法線ベクトル $\mathbf{n}$ は z に平行になるので，積分の寄与は，

$$n_z (\nabla \times \mathbf{A})_z dS = n_z \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y$$

となるが，これは偏微分の定義，

$$\frac{\partial}{\partial x} A_y = \frac{A_y(x + \Delta x, y, z) - A_y(x, y, z)}{\Delta x}, \quad \frac{\partial}{\partial y} A_x = \frac{A_x(x, y + \Delta y, z) - A_x(x, y, z)}{\Delta y},$$



を使えば，左辺は，

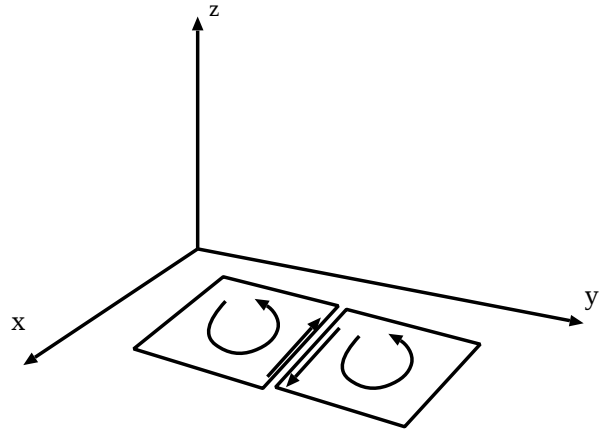
$$\mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) dS = A_y(x+\Delta x, y, z)\Delta y - A_y(x, y, z)\Delta y - A_x(x, y+\Delta y, z)\Delta x + A_x(x, y, z)\Delta x$$

となる．これは，図に書いてみるとわかるように，点 (x, y, z) から出発して，反時計回りに面積要素 dS の周囲を循環（回転）する線積分に他ならない．すなわち，

$$\int_{\text{閉曲面で囲まれた微小面積}} \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) dS = \oint_{\text{微小閉曲面}} d\mathbf{x} \cdot \mathbf{A} \quad (27)$$

となり，微小面積 dS の場合はストークスの定理が成り立っていることが示せた．

次にこの閉曲面が2つ並んでいる場合を考える．全体を一つの閉曲面 S と考えることは，2つの閉曲線で囲まれた面 S_1, S_2 を別々に考えることは同じことになる．右辺の線積分領域の違いは，2つに分けて考えた場合は境界に余計に入る2本の線（についての積分）だが，ここでの線積分の方向は逆方向であるので，その線での寄与はいつでもキャンセルされている．このことから，



$$\begin{aligned} \int_{\text{全平面 } S} \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) dS &= \int_{\text{部分面 } S_1} \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) dS + \int_{\text{部分面 } S_2} \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) dS \\ &= \left(\oint_{\text{微小閉曲面 } C_1} + \oint_{\text{微小閉曲面 } C_2} \right) d\mathbf{x} \cdot \mathbf{A} \\ &= \oint_{S \text{ を囲む閉曲面 } C} d\mathbf{x} \cdot \mathbf{A} \end{aligned} \quad (28)$$

となり，2つの閉曲面の場合にも成り立つことが示せた．このまま広い閉曲面の場合にも細かく分割することで同様に示せる．

さて、平坦な平面については証明できたとすると、次に一般の面についての場合が気になる。今、対象となるウネウネ平面を平坦な面で囲んでしまった閉曲面 S を考える(右図)。そこで、ベクトル場 $\nabla \times \mathbf{A}$ に対するガウスの定理(発散定理)は、

$$\int \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) dV = \int \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) dS \quad (29)$$

ところで、左辺はベクトル場の性質よりゼロになる($\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$)。

一方で、右辺は、

$$\int \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) dS = \left(\int_{\text{ウネウネ}} + \int_{\text{平坦}} \right) \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) dS = 0 \quad (30)$$

となるので、次のようになる。

$$\int_{\text{ウネウネ}} \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) dS = - \int_{\text{平坦}} \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) dS \quad (31)$$

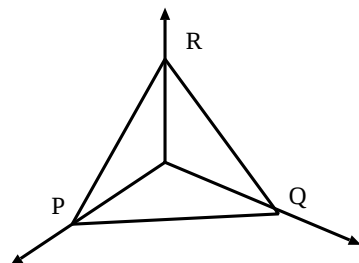
右辺には、(すでに示した)Stokes の定理を使って、それぞれウネウネ面を囲んでいる平坦面の回りの線積分の和に置き換えられる。

$$\begin{aligned} \int_{\text{ウネウネ}} \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) dS &= - \left(\int_{-C_1} + \int_{-C_2} + \cdots \right) \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} \\ &= \int_{\text{ウネウネ周回}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (32)$$

というわけで、ウネウネしていてもよいことがわかる。

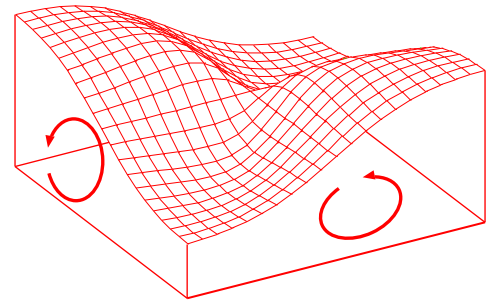
1.2-10 [ストークスの定理の練習]:

これはストークスの定理の実感練習問題である。



$\nabla \times \mathbf{A} = (2y, 2z, 2x)$ であり、面 PQR は $x + y + z = 1$ で表されるので、面の法線ベクトルは $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ である。ここから左辺の被積分関数は、 $\mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = \frac{2}{\sqrt{3}}(x + y + z)$ であることがわかる。この面積分の実行は $z = 0$ すなわち xy 平面へ写像とるのが簡単である。

面 PQR の $z = 0$ 平面への写像は、領域: $(0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x)$ の三角形である。面 PQR 上の面積要素 dS と xy 平面の面積要素 $dx dy$ とは、それらの面のなす角 θ を用いて、 $\cos \theta = \frac{dx dy}{dS}$ であるが、この $\cos \theta$ は、 $\mathbf{n} \cdot (0, 0, 1) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ であるこ



上のウネウネ面についての Stokes の定理を示したい。こんな図でイメージつかめるだろうか?

とから ,

$$\frac{dxdy}{dS} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \implies dS = \sqrt{3}dxdy$$

である . 面 PQR では $z = 1 - x - y$ であることに注意して , 左辺の積分は

$$\begin{aligned} \int_{\text{面 } PQR} dS \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) &= \int_{\text{面 } PQR} dS \frac{2}{\sqrt{3}}(x + y + z) \\ &= \int_{xy \text{ 面への写像面}} \sqrt{3}dxdy \frac{2}{\sqrt{3}}(x + y + 1 - x - y) \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dxdy 2 = \int_0^1 2(1-x) = 1. \end{aligned}$$

となる .

一方で , 右辺は 3 つの線積分からなる . まず , 線分 PQ から考える . 線分 PQ は , $z = 0$ と $x = 1 - y (0 \leq x \leq 1)$ の面の交線であるから , $dz = 0, dx = -dy$ である .

$$\int_{PQ} d\mathbf{x} \cdot \mathbf{A} = \int_{PQ} (z^2 dx + x^2 dy) = \int_0^1 dy (1-y)^2 = \frac{1}{3}.$$

同様に , 線分 QR と線分 RP もそれぞれ $1/3$ になるので , あわせると $\int_{PQ+QR+RP} d\mathbf{x} \cdot \mathbf{A} = 1$ である .

1.2-11 [保存力]:

力学で出てきた保存力を , ベクトル解析の知識を使って考えてみる . 力 F は , その仕事経路に依存しないときに保存力と呼ばれる . それと同値関係にあることは $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ であることは , ストークスの定理から導かれる . ここでは力が保存力であることは , 仕事ではなくて rot を調べることから導くことにする . 具体的に与えられた力の性質から , それぞれの成分を見てみることにする . まずは , x 成分 $((\nabla \times \mathbf{F})_x$ と表す) である .

$$\begin{aligned} (\nabla \times \mathbf{F})_x &= \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial(f(r)z)}{\partial y} - \frac{\partial(f(r)y)}{\partial z} = z \frac{\partial f(r)}{\partial y} - y \frac{\partial f(r)}{\partial z} \\ &\downarrow \left(\frac{\partial}{\partial y} f(r) = \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial}{\partial r} f(r) = \frac{y}{r} \frac{\partial f}{\partial r} \right) \\ &= \frac{yz}{r} \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{yz}{r} \frac{\partial f}{\partial r} = 0 \end{aligned}$$

同様に , y, z 成分もゼロになることが示せる . ここから , この力 F は保存力だとわかる .

さて , 力 F が $F = f(r)x$ となる力は中心力と呼ばれる . 例として , ばねの復元力 $f(r) = \text{定数}$, 万有引力・クーロン力 $f(r) \propto 1/r^2$ などがある . 中心力は一般に保存力になることが , この練習問題で示されたことになる .

1.2-12 [ガウスの法則 (再度)+電位]:

次のレポート問題とする .

1.2-13 [電気双極子]:

電場と同様に電位も重ね合わせの原理から二つの電荷の電位を足し合わせることで求まる . また , 電位から電場は grad すれば求まる . ここでは電位から電場を求める練習問題です .

1 . それぞれの電荷が持っているクーロン電位を 2 つ重ね合わせることで全体 $\phi(\mathbf{x})$ の電位を求める .

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-a)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+a)^2}} \right] \quad (33)$$

位置 $|\mathbf{x}|$ が電荷間の距離 $2a$ に比べて非常に大きい時にどのようなになるかを考える .
まずは , $a/z \ll 1$ として , $a/z = 0$ の回りでの展開すると ,

$$(z \pm a)^2 = z^2 (1 \pm 2a/z + O((a/z)^2)) \simeq z^2 \pm 2az$$

であるから , クーロン電位のそれぞれの項は ,

$$(x^2 + y^2 + (z \pm a)^2)^{-1/2} \simeq (x^2 + y^2 + z^2 \pm 2az)^{-1/2} \simeq \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \mp \frac{az}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

となり , 式 (34) は ,

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}) &\simeq \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2az}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ &\downarrow \text{ここで } \mathbf{p} = (0, 0, 2aq), \mathbf{R} = (x, y, z) \text{ を使えば ,} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3} \end{aligned} \quad (34)$$

となる . これは電気双極子と呼ばれている系であり , $\mathbf{p}$ を電気双極子モーメントと呼ぶ .

2 . 続けて , この電位から電場を求めてみる . $|\mathbf{p}| = p = 2aq$ として ,

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial}{\partial x} \phi = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3xz}{|\mathbf{R}|^5}, \\ E_y &= -\frac{\partial}{\partial y} \phi = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3yz}{|\mathbf{R}|^5}, \\ E_z &= -\frac{\partial}{\partial z} \phi = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\mathbf{R}|^3} - \frac{3z^2}{|\mathbf{R}|^5} \right). \end{aligned}$$