

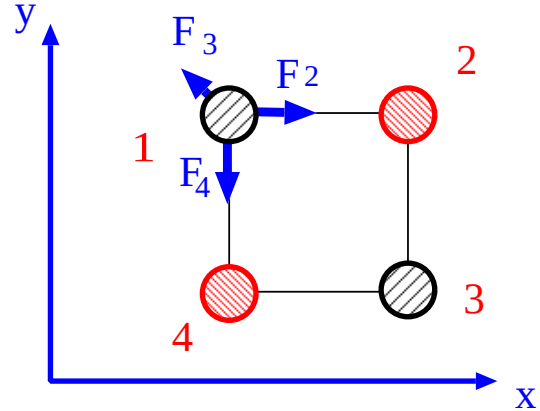
第一回電磁気Bレポート問題解答例

問題1 (練習問題 1-1.6)

電場をベクトルとして考える習慣になれることが、この問題の趣旨である。二番は力学の問題として、何が起きるか想像してみようということであった。

1. ベクトルの合成

図のように座標軸をとり、4つの点電荷をそれぞれ1,2,3,4と呼ぶことにする。4つの点電荷の配置は対称的なので、点電荷1について考えることにし、他の電荷から受ける力をそれぞれ $\mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \mathbf{F}_4$ と書くことにする。点電荷2,4からは大きさが $|F_{2,4}| = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2}$ の引力を、点電荷3からは大きさが $|F_3| = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 2a^2}$ の斥力を受ける。それら3つの力ベクトルはそれぞれ、



$$\mathbf{F}_2 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{F}_4 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{F}_3 = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 a^2} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

となり、ベクトルの合成を考えれば、それぞれの点電荷が受ける力は

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 &= \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_4 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \frac{2\sqrt{2}-1}{2} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1)$$

となることがわかる。これは大きさが、 $\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \frac{2\sqrt{2}-1}{2}$ で四角形の中心方向の力であることがわかる。他の点電荷も同様で、同じ大きさで中心方向に力を受けている。

2. 力と運動

さて、力がわかればどちらの向きに動こうとするのかがわかる。そこで、点電荷の固定を外すとどうなるかを考えてみると、どの点電荷も中心の方向に力が働いているので、中心向けに動き出すであろう。実際には運動方程式を解いてみたいところであるが、点電荷の質量をあからさまに与えていなかったのも、どのように設定するかで答えは異なる。

但し、全ての点電荷には働く力の合力がゼロであることに注目すれば、この4つの質点の重心の運動方程式から、重心の位置ベクトルは時間に依存しないことにはわかる。次に、どの点電荷も質量が同じだとすると、徐々に四角形が小さくなり、加速度を増しながら中心に集結することになる¹。点電荷の都合上、それ以上詳しい議論をするのは難しい。ただ、仮にこのように点電荷を離して置いておいたとしても、クーロン力によって、互いに引き寄せることはわかり、離れた状態を保つためには何かしらの他の力が必要になることがわかる。

¹質量がバラバラだと、四角形を保つことなく集結するので、もう少し複雑な運動になるだろう。

問題 2

これは具体的にベクトル場の演算を計算する練習である．順に示していく．

2-1. ベクトルの成分をそれぞれ $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$, $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$ として, 左辺から計算すると,

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (A_y B_z - A_z B_y, A_z B_x - A_x B_z, A_x B_y - A_y B_x) \\&= \frac{\partial A_y}{\partial x} B_z + A_y \frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial A_z}{\partial x} B_y - A_z \frac{\partial B_y}{\partial x} + \frac{\partial A_z}{\partial y} B_x + A_z \frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{\partial A_x}{\partial y} B_z - A_x \frac{\partial B_z}{\partial y} \\&\quad + \frac{\partial A_x}{\partial z} B_y + A_x \frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{\partial A_y}{\partial z} B_x - A_y \frac{\partial B_x}{\partial z} \\&= B_x \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + B_y \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + B_z \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \\&\quad - A_x \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) + A_y \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) + A_z \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) = \text{右辺}\end{aligned}$$

2-2. これも定義に従って計算する．

$$\begin{aligned}A_x &= \frac{\partial}{\partial x} \log \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right) = \frac{\frac{1}{2} 2x (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)} \\A_y &= \frac{\partial}{\partial y} \log \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right) = \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)} \\A_z &= \frac{\partial}{\partial z} \log \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right) = \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)}\end{aligned}$$

問題 3 (練習問題 1-1.4)

なぜ日常的に電磁気力を感じないのかを考えてみようというのが, この問題である．

よくある解答は「地球の質量が大きいから, 万有引力が大きい」であった．それも事実ではある．しかし, 例えば 60Kg の人間が感じる重力に匹敵するクーロン力をつくり出すためにどのくらい電荷が必要かを考えよう．問 2 と同じような議論になるのだが, 人間から $q[\text{C}]$ だけ電子を引っ剥して, 抜き出して, 地球の中心に置いたとしよう．

$$\text{万有引力} = G \frac{\text{地球の質量} \times 60[\text{Kg}]}{\text{大体地球の半径}^2} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 \text{大体地球の半径}^2} = \text{クーロン力}$$

地球の質量が約 $6.0 \times 10^{24} \text{Kg}$ であることから, これを解いて, $q = 2.7 \times 10^6 [\text{C}]$ となり, これは電子 $2.7 \times 10^6 / 1.6 \times 10^{-19} = 1.7 \times 10^{25}$ 個分である．これは相当な量だと思えるが, 人間が中性子だけでできているとすると, 大体 $60 / 1.7 \times 10^{-27} = 3.5 \times 10^{28}$ 個もあるわけで, $4.9 \times 10^{-4} \simeq 0.5\%$ の電子をくれてやるだけで重力に匹敵すると考えれば, 地球の質量も大したこと無い!!

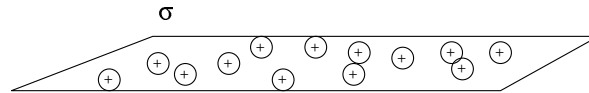
さて, 実際にはそんなことはおこらない．我々がクーロン力を感じない最大の理由は身近な物質は正負の電荷が同じだけあって, 電気的に中性になっているからである．問 1 で見たように, もしも, 正負の電荷を分離したとしても, その状態はクーロン力の強さのために安定には存在できない．下敷を擦って, 電荷を引き剥しても, 放っておくとすぐに電荷は開放されてしまい, 電気的中性に戻る．ただ, 電荷が中性に戻ろうとするときを我々は感じることはあります, 特にこれからの季節には, ドアのノブや車のドアあたりで．

第二回電磁気Bレポート問題

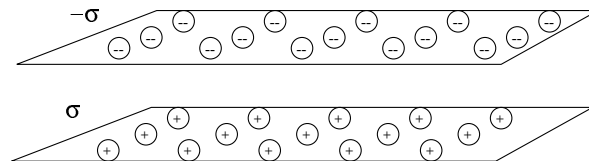
福島孝治 (東京大学大学院総合文化研究科)

平成 19 年 11 月 15 日: ver. 1.1

問題 1 「平板電荷の電場について」: 電荷面密度 σ で帯電させた無限に広い平板がつくる電場をガウスの法則を用いて求めよ. また, 平板が有限の大きさ, 例えば一辺 a の正方形になった場合にどのように変わるかを説明せよ.



問題 1 「二枚の平板電荷について」: それぞれ正と負に一樣に帯電した無限に広い平板が距離 d だけ離れて平行に置かれている. それぞれの面密度は $+\sigma, -\sigma$ とする. これらの平板が作る電場を求めよ. また, この二枚の平板の近くでの電気力線を描け.



問題 3: 「ガウスの法則だけから電場のルールが全て決まらないこと」 電荷分布を $\rho(\boldsymbol{x})$ として, ガウスの法則の微分形

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = \rho(\boldsymbol{x})/\epsilon_0 \quad (2)$$

を満たすベクトル場 $\boldsymbol{E}$ があるとき, 任意のベクトル場 $\boldsymbol{A}$ を用いて新しいベクトル場

$$\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E} + \nabla \times \boldsymbol{A}$$

を作ると, これもまたガウスの法則 (2) を満たすことを示し, ガウスの法則だけから電場の関数形が決まらない理由を説明せよ.

問題 4 「講義について」: あなたは大学の講義について意見や感想があれば述べよ.

〆切は 11 月 30 日とする.