物理学 (電磁気学) 演習問題集

福島孝治 (東大院総合文化)*

Ver. 2.03 (2008.10.9)

*E-mail: hukusima@phys.c.u-tokyo.ac.jp, URL:http://maildbs.c.u-tokyo.ac.jp/~fukushima/FSwiki/wiki.cgi

はじめに

この演習問題集は，福島が担当する電磁気学の講義の補習として利用することが想定されている．講義で話した内容が問題形式で書かれていることもあるし，講義の内容から当然解けるべき問題も含まれている．物理学を専攻する学生が腕を組ながら解くような類の問題集ではなく，講義で学んだ知見を深めるための復習・補習に役立てることが主たる目的の演習書である．実際に手を動かしてみて初めて理解できる，いや，理解したと“感じる”ことは経験的には少なくない．目で見て，耳から聞いて，やはり肌で感じることが理解する上で大切である．この意味で，演習書を手にすることは重要であり，これまでも学生さんから多くの要望があった．市販の演習書を探すことがその一つの解であるが，必ずしも得策とは個人的には感じない．これほどの基本的な問題程度に散財する価値がなかなか見出せないわけである．それならば，もっと古典的な名著を買うべきである．物理学専攻ならばランダウ・リフシッツだろう．余談が長くなったが，この問題集が多くの大学生であるみなさんの手を動かすきっかけになることを切に望む．

本問題集は市販の演習書よりはていねいな解答を心がけたが，いろいろと練られていないところも多いだろうことは了承頂きたい．現時点で気がついている問題点は，

- 問題の難易度を明示していないこと，
- 一般の電磁気学の広い領域をカバーできてる感じがしないこと，

である．

この問題集を編集するにあたり，これまでに講義に出席してくれた多くの学生からコメントや指摘を頂いた．また，大学院生の中島哲也君には丁寧に解答例を読んでいただいた．心から感謝したい．なお間違いがあるとすれば，筆者の責任である．是非，間違いを見つけたりや不明な点があれば，御指摘頂きたい．

福島孝治
東京大学大学院総合文化研究科
平成 20 年 10 月 9 日

目 次

1 数学的準備 **1**
1.1 1

2 静電場の世界 **2**
2.1 電荷の存在・クーロンの法則 2
2.2 電場とガウスの法則 4
2.3 導体 6
2.4 コンデンサーと電気容量 8

3 定常電流による磁場 **9**
3.1 ビオ・サバールの法則，アンペールの法則 9

4 電磁誘導と Maxwell 方程式 **12**
4.1 電磁誘導 12

1 数学的準備 (解答編) **15**
1.1 15

2 静電場の世界 (解答編) **20**
2.1 電荷の存在・クーロンの法則 20
2.2 電場とガウスの法則 32
2.3 導体 44
2.4 コンデンサーと電気容量 53

3 定常電流による磁場 (解答編) **59**
3.1 ビオ・サバールの法則，アンペールの法則 59

4 電磁誘導と Maxwell 方程式 (解答編) **66**
4.1 電磁誘導 66

A 各問題毎の目次 **70**

version:	date	更新内容
Ver. 1.0:	2007.10.10	初版
Ver. 1.1:	2007.11.4	1.1 章まで
Ver. 1.11:	2007.11.7	若干の加筆修正
Ver. 1.2:	2007.11.22	1.2 への加筆
Ver. 1.21:	2007.11.28	若干の修正
Ver. 1.22:	2007.12.14	1.3 を加筆
Ver. 1.23:	2008.2.4	修正
Ver. 2.00:	2008.9.26	問題と解答を合体
Ver. 2.01:	2008.9.30	1 章を分割
Ver. 2.02:	2008.10.1	問題の目次を追加

物理学 (電磁気学) 問題編

1　数学的準備

1.1

1.1–1 [**ベクトルの性質**]:
一般のベクトル$\boldsymbol{A}$= (A_x, A_y, A_z) について，次の式を示せ：

$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = 0$$

1.1–2 [**ベクトル場の演算**]:
ベクトル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = (3x^2y, -2xyz, xz^3)$ に対して，次の式を計算せよ.

$$(1)\nabla \cdot \boldsymbol{A}, \quad (2)\nabla \times \boldsymbol{A}, \quad (3)\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A})$$

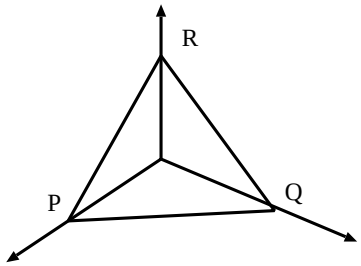
1.1–3 [**ガウスの定理の練習**]:
3 つの平面 $x = 0, y = 0, z = 0$ と 3 つの平面 $x = 1, y = 1, z = 1$ で囲まれた立方体を V，その表面を S とするとき，ベクトル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = (xy, yz, zx)$ に対して、ガウスの定理が成り立つことをガウスの定理の両辺をそれぞれ計算して確かめよ.

1.1–4 [**ストークスの定理**]:
任意の面 S に対して，ベクトル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ が次の式を満たすことを示せ.

$$\int dS\boldsymbol{n} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \int_C d\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{A}$$

ここで，n は面の法線ベクトルであり，右辺の積分は面の周辺に対する線積分を表す.

1.1–5 [**ストークスの定理の練習**]:



x 軸，y 軸，z 軸と面 $x + y + z = 1$ の交点を P, Q, R とすると，面 PQR に対して，ベクトル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = (z^2, x^2, y^2)$ がストークスの定理を満たすことを確認せよ.

1.1–6 [**保存力**]:
ベクトル $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = f(r)\boldsymbol{x}$ で与えられている力は保存力であることを示せ．すなわち，$\nabla \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$ を示せ．ここで，$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ であり，$f(r)$ は r のある関数であるとする．

1.1–7 [**テーラー展開**]:
次の関数の $x = 0$ のまわりのテーラー展開式を x^3 まで求めよ．

(a) $\tanh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, (b) $\dfrac{1}{\cos x}$, (c) $\sinh^{-1} x$

2 静電場の世界

2.1 電荷の存在・クーロンの法則

2.1–1 [**電荷量**]:
銅は銅原子一個につき 1 つの伝導電子がある．10g の銅の伝導電子の総電荷量は何クーロンか?

2.1–2 [**クーロン力**]:
1 クーロンの 2 つの点電荷を 1m の距離におくとき，それらの間に働くクーロン力は?

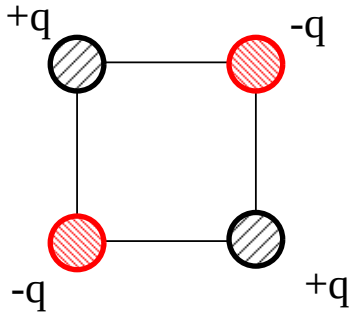
2.1–3 [**水素原子でのクーロン力の強さ**]:
水素原子中で，電子と陽子間に働くクーロン力と万有引力の大きさの比を求めてみよう．以下の数値を用いてよい．

電子の電荷	1.6×10^{-19} C
真空の誘電率 ϵ_0	$8.9 \times 10^{-12}\mathrm{C}^2/\mathrm{N\ m}^2$
万有引力定数 G	6.7×10^{-11} N $\mathrm{m}^2/\mathrm{kg}^2$
電子の質量 m_e	9.1×10^{-31} kg
陽子の質量 m_p	1.7×10^{-27} kg

2.1–4 [**身近な電磁気力**]:
何故日常生活では電磁気力よりも万有引力 (重力) を主に感じるか理由を考察せよ．または電磁気力を普段感じることがあるか?

2.1–5 [**電荷の中性**]:
もしも水素原子において，電子と陽子の電荷の絶対値がずれていたとしたら，何が起きるだろうか?現実世界を考慮して，許されるずれの大きさをおおざっぱに見積もってみよう。

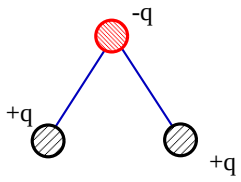
2.1–6 [**クーロン力 1**]:
平面上にある一辺の長さが a の正方形の 4 つの頂点に点電荷 q,$-q$ が隣りの符号が異なるように固定されている.



(a) それぞれの電荷の受けるクーロン力を求めよ.

(b) 点電荷の固定を外すと，電荷はどうなるか?

2.1–7 [**クーロン力 2**]:
平面上にある一辺が a の正三角形の 3 つの頂点に点電荷 q,$-q$ を図のように固定した.



(a) それぞれの電荷の受けるクーロン力を求めよ.

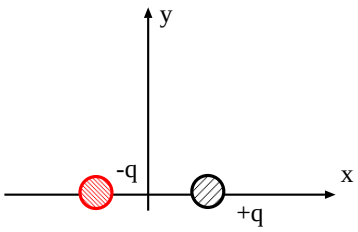
(b) 点電荷の固定を外すと，電荷はどうなるか?

2.1–8 [**2 つの異なる電荷のつくるクーロン電場**]:
右図のように，正電荷 q と負電荷 $-q$ を距離 a だけ離して x 軸上に置く．この 2 つの電荷が作る電場を考える.

(a) y 軸上で，原点から距離 y の点にある位置における電場$\boldsymbol{E}$を求めよ．$y \gg a$ であると仮定して求めよ.

(b) x 軸上で，原点から距離 x の点にある位置における電場$\boldsymbol{E}$を求めよ．$x \gg a$ であると仮定して求めよ.

(c) * 2 つの電荷から十分に離れた位置における電場$\boldsymbol{E}$を求めよ.



2.1–9 [**球対称な電荷の作る電場**]:
半径 a の球面上に一様な面電荷密度 σ で分布している球殻の作る電場を考える．特に，球殻の内側と外側に分けて考えること.

(a) 周囲をアルミホイルでくるんだピンポン玉がある．ピンポン玉の中は空洞である．最初，このピンポン玉は電荷を帯びていないとする．どのようにすれば，上記のように表面に一様な電荷分布をもった球ができるか．その方法とそのために必要な道具を提案せよ.

(b) 球殻の内部に電場はないことを示せ.

(c) 球殻の外部の電場を求めよ.

2.1–10 [**一様平面電荷の作る電場**]:
平面の一様電荷分布を σ として，ある観測位置$\boldsymbol{x}$での電場$\boldsymbol{E}$ は,

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\int_S dS' \frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x'}|^2}\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x'}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x'}|} \tag{1}$$

となる．平板が無限に広がっている場合について，この積分を実行せよ.

2.1–11 [**一様に帯電した直線電荷の作る電場**]:
一様な線密度 λ で帯電している無限に長い直線電荷の作る電場を求めよ．有限の長さ l のときはどのようになるか考察せよ.

2.1–12 [**クーロン場の発散**]:
原点 0 にある電荷 q の点電荷が位置$\boldsymbol{r}$= (x, y, z) につくるクーロン電場

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{|\boldsymbol{r}|^2}\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)\end{aligned}$$

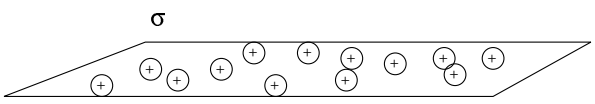
について，原点以外で発散がゼロになっていること，すなわち，$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = 0$ を示せ.

また，原点以外で回転がゼロになっていること，すなわち，$\nabla\times\boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}$ を示せ.

2.2 電場とガウスの法則

2.2–1 [**ガウスの法則の例題**]:
2.1-9, **2.1-10**, **2.1-11** をガウスの法則を使って再考せよ.

2.2–2 [**平板電荷の電場について**]:
電荷面密度 σ で帯電させた無限に広い平板がつくる電場をガウスの法則を用いて求めよ．その結果を立体角を用いて示せ．また，平板が有限の大きさ，例えば一辺 a の正方形になった場合にどのように変わるかを説明せよ.



2.2–3 [**二枚の平板電荷**]:
それぞれ正と負に一様に帯電した無限に広い平板が距離 d だけ離れて平行に置かれている．それぞれの面密度は $+\sigma, -\sigma$ とする．これらの平板が作る電場を求めよ.