

---

# 物理学 (電磁気学) 解答例編

---

## 1 数学的準備 (解答編)

### 1.1

#### 1.1-1 [ベクトルの性質]:

これは電場に限定されずに一般的なベクトルの性質であるが、各成分をあらかじめ代入して計算すれば示すことが出来る。

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) &= \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial y} \\ &= 0\end{aligned}$$

ほとんどベクトル積の定義が分かれば出来るはず。この関係式は後の問題でも使われる。

#### 1.1-2 [ベクトル場の演算]:

ベクトル場の微分の練習問題である。

##### (1) ベクトル場 $\mathbf{A}$ の発散 ( $\text{div } \mathbf{A}$ )

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 6xy - 2xz + 3xz^2.$$

##### (2) ベクトル場 $\mathbf{A}$ の回転 ( $\text{rot } \mathbf{A}$ )

$$\begin{aligned}(\nabla \times \mathbf{A})_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = 0 + 2xy \\ (\nabla \times \mathbf{A})_y &= \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = 0 - z^3 \\ (\nabla \times \mathbf{A})_z &= \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = -2yz - 3x^2\end{aligned}$$

これらをまとめると、 $\nabla \times \mathbf{A} = (2xy, -z^3, -2yz - 3x^2)$ 。

##### (3) ベクトル場 $\mathbf{A}$ の発散の勾配: $\text{grad}(\text{div } \mathbf{A})$

$$\nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) = \nabla (6xy - 2xz + 3xz^2) = (6y - 2z + 3z^2, 6x, -2x + 6xz).$$

### 1.1-3 [ガウスの定理の練習]:

数学の定理であるガウスの定理

$$\int dV \nabla \cdot \mathbf{A} = \int dS \mathbf{n} \cdot \mathbf{A}$$

を実感するための練習問題である．本来は両辺のうちの計算しやすい方を計算するのが実際の使い方であるが，ここでは両辺それぞれを計算して，等式が成り立つことを確かめてみる．

まずは左辺から計算する． $\nabla \cdot \mathbf{A} = x + y + z$  であるから，

$$\int dV \nabla \cdot \mathbf{A} = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz (x + y + z) = 3 \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz x = \frac{3}{2}$$

となる．ここで，2式から3式への移行は  $x, y, z$  の入れ換え対称性から， $(x + y + z)$  のどの項も同じ値をとることを使った．

一方，右辺は，全部で6つの面での積分がある．それぞれに分けて計算する．

$$\begin{aligned} \int dS \mathbf{n} \cdot \mathbf{A} &= \int_{x=1 \text{ の面}} dydz (1, 0, 0) \cdot \mathbf{A} + \int_{x=0 \text{ の面}} dydz (-1, 0, 0) \cdot \mathbf{A} \\ &\quad + \int_{y=1 \text{ の面}} dx dz (0, 1, 0) \cdot \mathbf{A} + \int_{y=0 \text{ の面}} dx dz (0, -1, 0) \cdot \mathbf{A} \\ &\quad + \int_{z=1 \text{ の面}} dx dy (0, 0, 1) \cdot \mathbf{A} + \int_{z=0 \text{ の面}} dx dy (0, 0, -1) \cdot \mathbf{A} \\ &= \int_{x=1 \text{ の面}} dydz xy + \int_{x=0 \text{ の面}} dydz (-xy) + \int_{y=1 \text{ の面}} dx dz yz \\ &\quad + \int_{y=0 \text{ の面}} dx dz (-yz) + \int_{z=1 \text{ の面}} dx dy zx + \int_{z=0 \text{ の面}} dx dy (-zx) \\ &= 3 \int_{x=1 \text{ の面}} dydz xy = 3 \int_0^1 dy \int_0^1 dz y = \frac{3}{2} . \end{aligned}$$

最後の行では対称性と  $x = 1$  の面であることから  $x = 1$  を代入した．確かに右辺 = 左辺であることが確かめられた．

### 1.1-4 [ストークスの定理]:

このストークスの定理はガウスの定理と並んで，ベクトル場を解析する上でよく使われる定理である．ベクトル場  $\mathbf{A}$  の回転 (rot) について一般に成り立つストークス定理は，

$$\int_S \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) dS = \int_C d\mathbf{x} \cdot \mathbf{A} \quad (3)$$

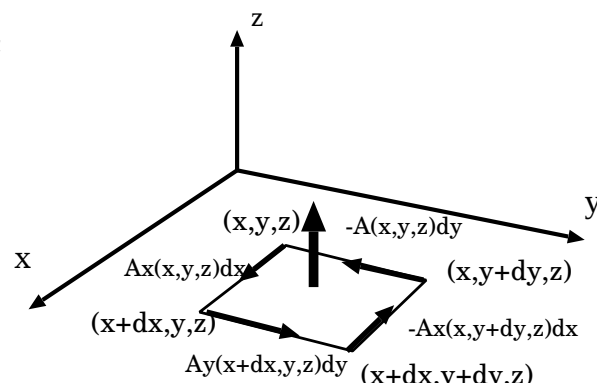
である．

- 右辺は，ある閉曲線  $C$  についてのベクトル場の線積分である．

- 左辺の被積分関数には，微分演算子ナブラ  $\nabla$  とベクトル場  $\mathbf{A}$  とのベクトル積であり，これはベクトル場の回転 (rotation) と呼ばれている．その積分は閉曲線  $C$  で囲まれた閉じた曲面での面積分であり，被積分関数はベクトル場の回転と面上での法線ベクトルとの内積である．

簡易版の証明を示す．ガウスの定理の証明でも行ったように，左辺から右辺が出て来る様子を見ることにする．まず，簡単のために  $xy$  平面に平行な微小な面を考える．面積要素を  $dS = \Delta x \Delta y$  とすると，法線ベクトル  $\mathbf{n}$  は  $z$  に平行になるので，積分の寄与は，

$$n_z(\nabla \times \mathbf{A})_z dS = n_z \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y$$



となるが，これは偏微分の定義，

$$\frac{\partial}{\partial x} A_y = \frac{A_y(x + \Delta x, y, z) - A_y(x, y, z)}{\Delta x}, \quad \frac{\partial}{\partial y} A_x = \frac{A_x(x, y + \Delta y, z) - A_x(x, y, z)}{\Delta y},$$

を使えば，左辺は，

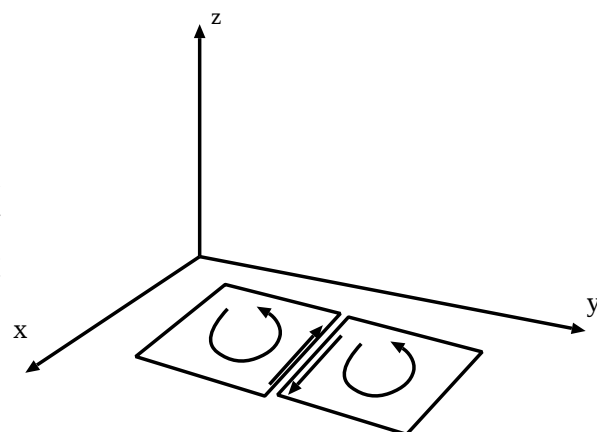
$$\mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) dS = A_y(x + \Delta x, y, z) \Delta y - A_y(x, y, z) \Delta y - A_x(x, y + \Delta y, z) \Delta x + A_x(x, y, z) \Delta x$$

となる．これは，図に書いてみるとわかるように，点  $(x, y, z)$  から出発して，反時計回りに面積要素  $dS$  の周囲を循環 (回転) する線積分に他ならない．すなわち，

$$\int_{\text{閉曲面で囲まれた微小面積}} \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) dS = \oint_{\text{微小閉曲面}} d\mathbf{x} \cdot \mathbf{A} \quad (4)$$

となり，微小面積  $dS$  の場合はストークスの定理が成り立っていることが示せた．

次にこの閉曲面が 2 つ並んでいる場合を考える．全体を一つの閉曲面  $S$  と考えることは，2 つの閉曲線で囲まれた面  $S_1, S_2$  を別々に考えることは同じことになる．右辺の線積分領域の違いは，2 つに分けて考えた場合は境界に余計に入る 2 本の線 (についての積分) だが，ここでの線積分の方向は逆方向であるので，その線での寄与はいつでもキャンセルされている．このことから，



$$\begin{aligned} \int_{\text{全平面 } S} \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) dS &= \int_{\text{部分面 } S_1} \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) dS + \int_{\text{部分面 } S_2} \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) dS \\ &= \left( \oint_{\text{微小閉曲面 } C_1} + \oint_{\text{微小閉曲面 } C_2} \right) d\mathbf{x} \cdot \mathbf{A} \\ &= \oint_{S \text{ を囲む閉曲面 } C} d\mathbf{x} \cdot \mathbf{A} \end{aligned} \quad (5)$$

となり、2つの閉曲面の場合にも成り立つことが示せた。このまま広い閉曲面の場合にも細かく分割することで同様に示せる。

さて、平坦な平面については証明できたとして、次に一般の面についての場合が気になる。今、対象となるウネウネ平面を平坦な面で囲んでしまった閉曲面  $S$  を考える(右図)。そこで、ベクトル場  $\nabla \times \mathbf{A}$  に対するガウスの定理(発散定理)は、

$$\int \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) dV = \int \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) dS \quad (6)$$

ところで、左辺はベクトル場の性質よりゼロになる( $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$ )。

一方で、右辺は、

$$\int \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) dS = \left( \int_{\text{ウネウネ}} + \int_{\text{平坦}} \right) \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) dS = 0 \quad (7)$$

となるので、次のようになる。

$$\int_{\text{ウネウネ}} \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) dS = - \int_{\text{平坦}} \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) dS \quad (8)$$

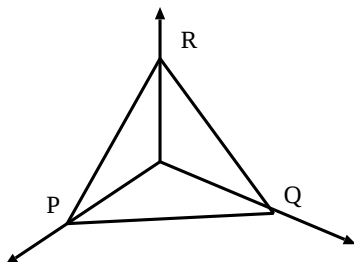
右辺には、(すでに示した)Stokes の定理を使って、それぞれウネウネ面を囲んでいる平坦面の回りの線積分の和に置き換えられる。

$$\begin{aligned} \int_{\text{ウネウネ}} \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) dS &= - \left( \int_{-C_1} + \int_{-C_2} + \cdots \right) \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} \\ &= \int_{\text{ウネウネ周囲}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (9)$$

というわけで、ウネウネしていてもよいことがわかる。

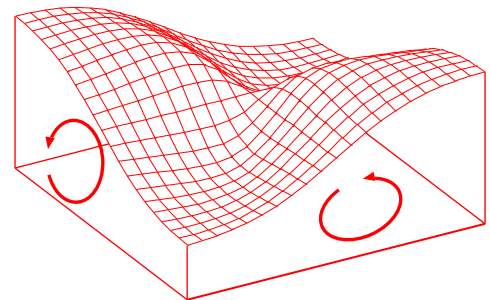
#### 1.1-5 [ストークスの定理の練習]:

これはストークスの定理の実感練習問題である。



$\nabla \times \mathbf{A} = (2y, 2z, 2x)$  であり、面 PQR は  $x + y + z = 1$  で表されるので、面の法線ベクトルは  $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$  である。ここから左辺の被積分関数は、 $\mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = \frac{2}{\sqrt{3}}(x + y + z)$  であることがわかる。この面積分の実行は  $z = 0$  すなわち  $xy$  平面へ写像とるのが簡単である。

面 PQR の  $z = 0$  平面への写像は、領域:  $(0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x)$  の三角形である。面 PQR 上の面積要素  $dS$  と  $xy$  平面の面積要素  $dx dy$  とは、それらの面のなす



上のウネウネ面についての Stokes の定理を示したい。こんな図でイメージつかめるだろうか?

角  $\theta$  を用いて,  $\cos \theta = \frac{dxdy}{dS}$  であるが, この  $\cos \theta$  は,  $\mathbf{n} \cdot (0, 0, 1) = \frac{1}{\sqrt{3}}$  であることから,

$$\frac{dxdy}{dS} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \implies dS = \sqrt{3}dxdy$$

である. 面  $PQR$  では  $z = 1 - x - y$  であることに注意して, 左辺の積分は

$$\begin{aligned} \int_{\text{面 } PQR} dS \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) &= \int_{\text{面 } PQR} dS \frac{2}{\sqrt{3}}(x + y + z) \\ &= \int_{xy \text{ 面への写像面}} \sqrt{3}dxdy \frac{2}{\sqrt{3}}(x + y + 1 - x - y) \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dxdy 2 = \int_0^1 2(1-x) = 1. \end{aligned}$$

となる.

一方で, 右辺は3つの線積分からなる. まず, 線分  $PQ$  から考える. 線分  $PQ$  は,  $z = 0$  と  $x = 1 - y (0 \leq x \leq 1)$  の面の交線であるから,  $dz = 0, dx = -dy$  である.

$$\int_{PQ} d\mathbf{x} \cdot \mathbf{A} = \int_{PQ} (z^2 dx + x^2 dy) = \int_0^1 dy (1-y)^2 = \frac{1}{3}.$$

同様に, 線分  $QR$  と線分  $RP$  もそれぞれ  $1/3$  になるので, あわせると  $\int_{PQ+QR+RP} d\mathbf{x} \cdot \mathbf{A} = 1$  である.

#### 1.1-6 [保存力]:

力学で出てきた保存力を, ベクトル解析の知識を使って考えてみる. 力  $F$  は, その仕事経路に依存しないときに保存力と呼ばれる. それと同値関係にあることは  $\nabla \times F = 0$  であることは, ストークスの定理から導かれる. ここでは力が保存力であることは, 仕事ではなくて  $\text{rot}$  を調べることから導くことにする. 具体的に与えられた力の性質から, それぞれの成分を見てみることにする. まずは,  $x$  成分  $((\nabla \times F)_x$  と表す) である.

$$\begin{aligned} (\nabla \times F)_x &= \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial(f(r)z)}{\partial y} - \frac{\partial(f(r)y)}{\partial z} = z \frac{\partial f(r)}{\partial y} - y \frac{\partial f(r)}{\partial z} \\ &\downarrow \left( \frac{\partial}{\partial y} f(r) = \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial}{\partial r} f(r) = \frac{y}{r} \frac{\partial f}{\partial r} \right) \\ &= \frac{yz}{r} \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{yz}{r} \frac{\partial f}{\partial r} = 0 \end{aligned}$$

同様に,  $y, z$  成分もゼロになることが示せる. ここから, この力  $F$  は保存力だとわかる.

さて, 力  $F$  が  $F = f(r)x$  となる力は中心力と呼ばれる. 例として, ばねの復元力  $f(r) = \text{定数}$ , 万有引力・クーロン力  $f(r) \propto \frac{1}{r^3}$  などがある. 中心力は一般に保存力になることが, この練習問題で示されたことになる.

### 1.1-7 [テーラー展開]:

(a,b) 順に展開していく .

$$\begin{aligned}e^{\pm x} &= 1 + (\pm x) + \frac{(\pm x)^2}{2!} + \frac{(\pm x)^3}{3!} + O(x^4), \\ \cosh(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2} + O(x^4), \\ \sinh(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{6} + O(x^4), \\ \tanh(x) &= \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{x + \frac{x^3}{6} + O(x^4)}{1 + \frac{x^2}{2} + O(x^4)} = x \left(1 + \frac{x^2}{6}\right) \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) + O(x^4) = x - \frac{x^3}{3} + O(x^4) \\ \frac{1}{\cos x} &= \frac{1}{1 + \frac{(ix)^2}{2} + O(x^4)} = 1 + \frac{x^2}{2} + O(x^4)\end{aligned}$$

(c) これはちょっと変わっている .

$$\begin{aligned}x &= \sinh y = y + \frac{y^3}{6} + O(y^5), \quad \text{これを逆に解くと,} \\ y &= x - \frac{y^3}{6} + O(x^5) = x - \frac{(x - \frac{y^3}{6})^3}{6} + O(x^5) = x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)\end{aligned}$$

とわかる . 他にもちょっとかわったところ展開としては , 次の例がある .

$$(1+x)^{1/x} = e \left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{11}{24}x^2 - \frac{7}{16}x^3 + O(x^4)\right)$$

## 2 静電場の世界 (解答編)

### 2.1 電荷の存在・クーロンの法則

#### 2.1-1 [電荷量]:

桁が大きくちがう量を実感的に理解するには訓練が必要である . ここではその例題として電荷量を考えてみることにする . 題意に従って , 数値を計算してみると , 求める電荷量は ,

$$\frac{10[\text{g}]}{63.5[\text{g/mol}]} \times 6.02 \cdot 10^{23}[\text{mol}^{-1}] \times 1.60 \cdot 10^{-19}[\text{C}] \simeq 1.52 \times 10^4[\text{C}]$$

となる . 実際には銅からこんな電荷をはぎ取することは不可能である . 下敷をこすって発生できる静電気は高々  $10^{-6}\text{C} = \mu\text{C}$  程度である .

#### 2.1-2 [クーロン力]:

クーロン力の大きさに関して数値を計算してみる問題である .

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r^2} = \frac{1}{4 \cdot 3.14 \cdot 8.9 \times 10^{-12}\text{C}^2/\text{Nm}^2} \frac{1\text{C}^2}{1\text{m}^2} \simeq 9.0 \times 10^9\text{N}$$

1Kg の質量に働く地球上での重力の大きさが 9.8[N] であることから，上の力は  $9.2 \times 10^8 \text{Kg} = 9.2 \times 10^5 \text{ton}$  の質量に働く重力に相当することがわかる．

### 2.1-3 [水素原子でのクーロン力の強さ]:

問題の意図はクーロン力の強さを見てみようということである．単純に数値を入れれば答えは出てくる．古典的力学の範囲では，水素原子は陽子の回りを回転していると考え．二つの距離を  $r$  とすると，クーロン力は，

$$\text{クーロン力} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

であり，万有引力は，

$$\text{万有引力} = G \frac{m_p m_e}{r^2}$$

となる．その比は，それぞれ数値を入れれば，

$$\frac{\text{クーロン力}}{\text{万有引力}} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{G m_p m_e} \simeq 2.2 \times 10^{39} \simeq \frac{1}{4.5 \times 10^{40}} \quad (10)$$

となり，クーロン力が圧倒的に大きいことがわかる．かなり大きな値なので，逆に実感は沸かない．また，このような比較がいいのかどうかもよくわからない．似たような問題として，地球は太陽の回りを公転しているが，ここでは万有引力と遠心力がつり合っている．この公転半径を，万有引力を無くして，クーロン力と遠心力から実現されていると考えたときに，どの位電荷を持たせればよいかを考えてみよう．

### 2.1-4 [身近な電磁気力]:

なぜ日常的に電磁気力を感じないのかを考えてみようというのが，この問題である．

よくある解答は「地球の質量が大きいから，万有引力が大きい」であった．それも事実ではある．しかし，例えば 60Kg の人間が感じる重力に匹敵するクーロン力をつくり出すためにどのくらい電荷が必要かを考えよう．問 2 と同じような議論になるのだが，人間から  $q[\text{C}]$  だけ電子を引っ剥して，抜き出して，地球の中心に置いたとしよう．

$$\text{万有引力} = G \frac{\text{地球の質量} \times 60[\text{Kg}]}{\text{大体地球の半径}^2} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 \text{大体地球の半径}^2} = \text{クーロン力}$$

地球の質量が約  $6.0 \times 10^{24} \text{Kg}$  であることから，これを解いて， $q = 2.7 \times 10^6 [\text{C}]$  となり，これは電子  $2.7 \times 10^6 / 1.6 \times 10^{-19} = 1.7 \times 10^{25}$  個分である．これは相当な量だと思うが，人間が中性子だけでできているとすると，大体  $60 / 1.7 \times 10^{-27} = 3.5 \times 10^{28}$  個もあるわけで， $4.9 \times 10^{-4} \simeq 0.5\%$  の電子をくれてやるだけで重力に匹敵すると考えれば，地球の質量も大したこと無い?!

さて、実際にはそんなことはおこらない．我々がクーロン力を感じない最大の理由は身近な物質は正負の電荷が同じだけあって、電氣的に中性になっているからである．もしも正負の電荷を分離したとしても、その状態はクーロン力の強さのために安定には存在できない．下敷を擦って、電荷を引き剥しても、放っておくとすぐに電荷は開放されてしまい、電氣的中性に戻る．ただ、電荷が中性に戻ろうとするときを我々は感じることはある、特にこれからの季節には、ドアのノブや車のドアあたりで．

#### 2.1-5 [電荷の中性]:

問題 2.1-3 で議論したように、電荷の中性がずれていたときには大きなクーロン力の効果でいろんなスケールでの物質の崩壊が起きているであろう．実際にはそれが起きていないわけで、そこから中性度合を大雑把に評価できる．仮りに、水素原子の陽子と電子の電荷が  $e$  と  $-e$  が中性から  $\delta$  だけずれていたとする．つまり、それぞれの電荷が  $(1 + \delta/2)e$  と  $-(1 - \delta/2)e$  だとする．水素原子間に働く力は斥力になり、その大きさは  $\frac{(\delta e)^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$  となる．水素原子からなる星が存在するということは、たくさんの水素原子間に働く力は、クーロン力による斥力よりも万有引力による引力の方が大きいはずである．この条件から、

$$\frac{(\delta e)^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} < G \frac{m_e m_p}{r^2} \implies \delta < 2.1 \times 10^{-20}$$

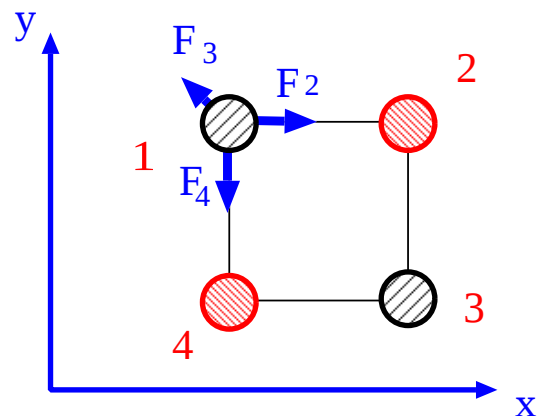
となる．世の中は中性にできていることがわかる．

#### 2.1-6 [クーロン力 1]:

電場をベクトルとして考える習慣になれることが、この問題の趣旨である．二番は力学の問題として、何が起きるか想像してみようということであった．

##### 1. ベクトルの合成

図のように座標軸をとり、4つの点電荷をそれぞれ 1, 2, 3, 4 と呼ぶことにする．4つの点電荷の配置は対称的なので、点電荷 1 について考えることにし、他の電荷から受ける力をそれぞれ  $F_2, F_3, F_4$  と書くことにする．点電荷 2, 4 からは大きさが  $|F_{2,4}| = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2}$  の引力を、点電荷 3 からは大きさが  $|F_3| = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 2a^2}$  の斥力を受ける．それら 3つの力ベクトルはそれぞれ、



$$\mathbf{F}_2 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{F}_4 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{F}_3 = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 a^2} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$