

$$\mathbf{F}_{AB} = \frac{F}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, \mathbf{F}_{BC} = \frac{F}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}, \mathbf{F}_{CA} = F \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

となり、ベクトルの合成を考えれば、それぞれの点電荷が受ける力は

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_A &= \mathbf{F}_{AB} + \mathbf{F}_{AC} = F \left\{ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \frac{F}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{F}_B &= \mathbf{F}_{BA} + \mathbf{F}_{BC} = F \left\{ -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} \right\} = F \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{F}_C &= \mathbf{F}_{CA} + \mathbf{F}_{CB} = F \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} \right\} = \frac{F}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

となることがわかる.

2. 力と運動

さて、力がわかればどちらの向きに動こうとするのかがわかる. そこで、点電荷の固定を外すとどうなるかを考えてみると、まずは点電荷が直線上の並ぶ方向に動こうとするであろう. 実際には運動方程式を解いてみたいところであるが、点電荷の質量をあからさまに与えていなかったり、問題の図の棒線が点電荷間の距離を固定しているように思えるので、固定されているかどうかで答え方が異なる.

まず、それぞれの運動量を $\mathbf{p}_A, \mathbf{p}_B, \mathbf{p}_C$ とすると、すぐわかることは、運動方程式

$$\frac{d}{dt}\mathbf{p}_A = \mathbf{F}_A, \quad \frac{d}{dt}\mathbf{p}_B = \mathbf{F}_B, \quad \frac{d}{dt}\mathbf{p}_C = \mathbf{F}_C,$$

から、

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B + \mathbf{p}_C) = \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_B + \mathbf{F}_C = \mathbf{0}$$

と重心の運動量は保存していることがわかる. これは AB 間や BC 間の距離が固定されているかどうかには依存しない. さて、適当に質量を与えて、運動方程式を解けばいいわけだが、これはちょっと難しいような問題である. 定性的には、以下のとおりであろう.

点電荷間の距離が固定されていない場合

最初は点電荷は直線上にならぶ方向に動き出すが、両端の点電荷から見た他の点電荷の相対位置は異符号の方が近いので、合力は重心に対して引力が働く. 結局は、重心の位置に点電荷が集結する².

点電荷間の距離が固定されている場合

上の設定よりも、自由度が格段に少なくなっているので、簡単である.

この場合は、重心に集結することはなく、へんの字一直線へんの字の逆の

²点電荷は“点”なので、衝突は起きないと考えている.

振動を繰り返すことになる．この時に振動数はクーロン力の形で決まっているはずである．

2.1-8 [2つの異なる電荷のつくるクーロン電場]:

重ね合わせの原理をつかって、電荷の作る電場を求めてみようというのが、この問題の趣旨である．

正負の電荷の位置をそれぞれ $r_{\pm}(\pm a/2, 0, 0)$ とする．さて、まず解答に行く前に、ガウスの法則を使って何がわかるかを考えてよう．この二つの電荷を囲むような閉曲面を考えると、ガウスの法則の右辺(総電荷量)はゼロになる．よって、左辺もゼロになるが、これは電場がゼロであることではない．その閉曲面を垂直に出て行く電場の大きさの**総量**がゼロなだけ、つまり出て行く量と入って来る量が同じである．残念ながら、これ以上のことはガウスの法則からはわからない．

(a) y 軸上での観測 観測点の座標を $\mathbf{x}(0, y, 0)$ とする．この点と正負電荷間の距離はどちらも同じであるから、この位置での電場の大きさは同じである．また、電場の y 成分は正負で大きさは同じで方向が逆なので、重ね合わせるとゼロになる． z 成分はないので、 x 成分だけ求めればよい．まず、それぞれの電荷が位置 $\mathbf{x}$ に作る電場の大きさ E は、 $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{y^2 + a^2/4}$ であるので、 x 成分は、

$$E_x = 2E \frac{a/2}{\sqrt{y^2 + a^2/4}} = \frac{qa}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(y^2 + a^2/4)^{3/2}} = \frac{qa}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{y^3} \left(1 + \frac{a^2}{4y^2}\right) \simeq \frac{qa}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{y^3}$$

となる．最後に $y \gg a$ の条件より、 $(a/y)^2$ は小さいとして無視した．よって、方向に注意して、答えは、

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \left(-\frac{qa}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{y^3}, 0, 0\right) \quad (12)$$

(b) x 軸上での観測 観測点を $\mathbf{x}(x, 0, 0)$ とすると、この場合もやはり x 成分の電場しかない．その値は、

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{(x - a/2)^2} - \frac{q}{(x + a/2)^2} \right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x^2} \left[\left(1 - \frac{a}{2x}\right)^{-2} - \left(1 + \frac{a}{2x}\right)^{-2} \right] \simeq \frac{aq}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{x^3}.$$

前問と同様に距離の3乗に逆比例する形になった．

(c) 一般の場合 さて、一般的に距離の逆3乗則が成り立っているだろうか．それを確かめるのがここでの問題である．前問と同様にそれぞれの電荷が作る電場を重ね合わせればよいが、ここでは**ずる**をして、電位を経由して求めてみる³．それぞれの電荷が持っているクーロン電位を2つ重ね合わせることで位置 $\mathbf{x}(x, y, z)$ での電位 $\phi(\mathbf{x})$ を求める．

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{(x - (a/2))^2 + y^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x + (a/2))^2 + y^2 + z^2}} \right] \quad (13)$$

³電位についてはもう少し後で詳しく議論する．

位置 $|x|$ が電荷間の距離 a に比べて非常に大きい時にどのようなになるかを考える．
 まずは， $a/x \ll 1$ として， $a/x = 0$ の回りでの展開すると，

$$(x \pm (a/2))^2 = x^2 \left(1 \pm a/x + O\left((a/2x)^2\right) \right) \simeq x^2 \pm ax$$

であるから，クーロン電位のそれぞれの項は，

$$((x \pm a/2)^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} \simeq (x^2 + y^2 + z^2 \pm ax)^{-1/2} \simeq \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \mp \frac{ax/2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

となり，式 (13) は，

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}) &\simeq \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{ax}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ &\downarrow \text{ここで, } \mathbf{p} = (aq, 0, 0), \mathbf{R} = (x, y, z) \text{ を使えば,} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3} \end{aligned} \quad (14)$$

となる．これは電気双極子と呼ばれている系であり， $\mathbf{p}$ を電気双極子モーメントと呼ぶ．電位 ϕ と電場 $\mathbf{E}$ の関係は， $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ であるから，電位から電場を求めてみる． $|\mathbf{p}| = p = aq$ として，

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial}{\partial x}\phi = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\mathbf{R}|^3} - \frac{3x^2}{|\mathbf{R}|^5} \right), \\ E_y &= -\frac{\partial}{\partial y}\phi = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3yx}{|\mathbf{R}|^5}, \\ E_z &= -\frac{\partial}{\partial z}\phi = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3xz}{|\mathbf{R}|^5}, \end{aligned}$$

となる．関連する問題に，問題 2.2-8，2.4-10 がある．

2.1-9 [球対称な電荷の作る電場]:

この問題の趣旨は，クーロンの法則と重ね合わせの原理から求まる電場の例を計算してみようということである．もちろん，ガウスの法則を用いてもよい．一度積分をしてみると，ガウスの法則に対する感動が5割増し(私的比較)になる．同じ問題を異なる方法で解いてみることは大切なことである．立体角(問題 2.1-10 参照)を用いて求めることはできるが，ここではクーロンの法則から積分する方法を示しておく．

(a) まずはそのような状況を作ってみようということだが，これは導体球⁴を用意すれば簡単にできる．ここではピンポン球にアルミをまいてみる．周囲と絶縁したピンポン球に，こすった下敷をくっつけることで，電荷を渡せばよい．ひとた

⁴後で説明するが，ここではおおらかに電気が流れる物体としておこう．

び電荷が帯びると、導体中の電荷は球面に平行な電場が生じないように、電荷の再配置を行う。今は対称性の高い球状なので、電荷は球面上に一様に分布する。なぜ下敷の電荷がピンポン球の方に移動するかは後からまた考えてみることにしよう。

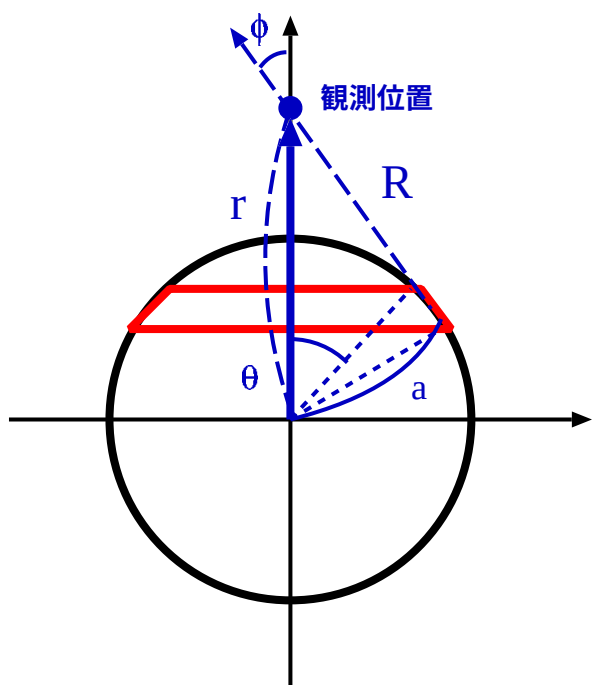
(b), (c) 半径 a の球面上に一様な面電荷密度 σ で分布している球殻の作る電場を考える。観測位置を z 軸にとっても一般性を失わない。 z 軸に垂直な面と球殻が交わっている円環は観測点との距離が一定の円になっている。球殻を微小な円環の集まりと考え、それぞれの微小円環の作る電場を重ね合わせて球殻全体の作る電場を求める。

図のように z 軸となす角 θ の円環上にある総電荷は、

$$\begin{aligned}\text{円環上の総電荷} &= \text{面密度}\sigma \times \text{面積} \\ &= \sigma(2\pi a \sin \theta)(a d\theta)\end{aligned}$$

となる。微小な円環が観測点に作る電場を考える。

そこで全ての円環について積分、すなわち θ を 0 から π まで重ね合わせればよい。



観測点から円環を見ると、ある円環上の部分に z 軸に対称な部分が必ず存在することから、 z 軸方向以外は対称からキャンセルされてゼロになるので、 z 軸方向だけを考えればよい。観測点から微小円環を見込む角度を ϕ とすると、 $\cos \phi = \frac{r - a \cos \theta}{R}$ である。ここで、 R は円環と観測点との距離で、 r, a, θ を用いて

$$R^2 = (r - a \cos \theta)^2 + a^2 \sin^2 \theta = r^2 - 2a \cos \theta r + a^2$$

と表される。その微小円環の作る電場の z 軸成分を $dE_r(\theta)$ は、

$$dE_r(\theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi a^2 \sigma \sin \theta d\theta}{R^2} \frac{r - a \cos \theta}{R}$$

となる。

図 1: 一様に帯電した半径 a の球殻

$$\begin{aligned}E_r(r) &= \int_0^\pi dE_r(\theta) = \frac{2\pi\sigma a^2}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi d\theta \sin \theta \frac{r - a \cos \theta}{(r^2 - 2a \cos \theta r + a^2)^{3/2}} \\ &\downarrow (\text{変数変換: } 2RdR = 2ar \sin \theta d\theta)\end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned}
& \downarrow \left(a \cos \theta = \frac{1}{2r} (r^2 + a^2 - R^2) \right) \\
& = \frac{\sigma a^2}{2\epsilon_0} \int_{|r-a|}^{r+a} \frac{R dR}{ar} \frac{r - \frac{1}{2r} (r^2 + a^2 - R^2)}{R^3} = \frac{\sigma a}{2\epsilon_0} \int_{|r-a|}^{r+a} dR \frac{1}{R^2} \left(1 - \frac{r^2 + a^2 - R^2}{2r^2} \right) \\
& \downarrow \left(\frac{1}{R^2} \left(1 - \frac{r^2 + a^2 - R^2}{2r^2} \right) = \frac{r^2 - a^2 + R^2}{2r^2 R^2} = \frac{1}{2r^2} \left(1 + \frac{r^2 - a^2}{R^2} \right) \right) \\
& = \frac{\sigma a}{4\epsilon_0 r^2} \int_{|r-a|}^{r+a} dR \left(1 + \frac{r^2 - a^2}{R^2} \right) = \frac{\sigma a}{4\epsilon_0 r^2} \left(R - \frac{r^2 - a^2}{R} \right) \Big|_{|r-a|}^{r+a} \\
& = \frac{\sigma a}{4\epsilon_0 r^2} \left[r + a - \frac{r^2 - a^2}{r + a} - |r - a| + \frac{r^2 - a^2}{|r - a|} \right] \\
& \text{下線部} = \begin{cases} 2a - (a - r) - (r + a) = 0 & \text{for } r < a \\ 2a - (r - a) + (r + a) = 4a & \text{for } r > a \end{cases} \\
& = \frac{\sigma a^2}{\epsilon_0 r^2} \theta(r - a)
\end{aligned} \tag{16}$$

ここで、 $\theta(x)$ はステップ関数で $x > 0$ の時に 1, $x < 0$ の時に 0 をとる。

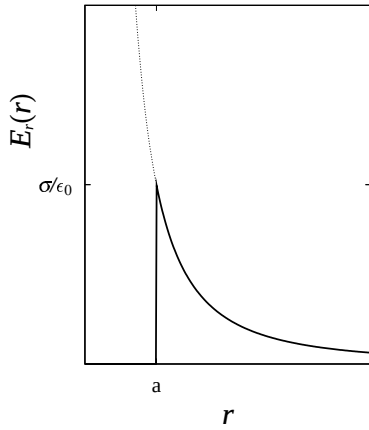


図 2: 電場の動径成分を原点からの距離の関数としてグラフにする

まとめると、

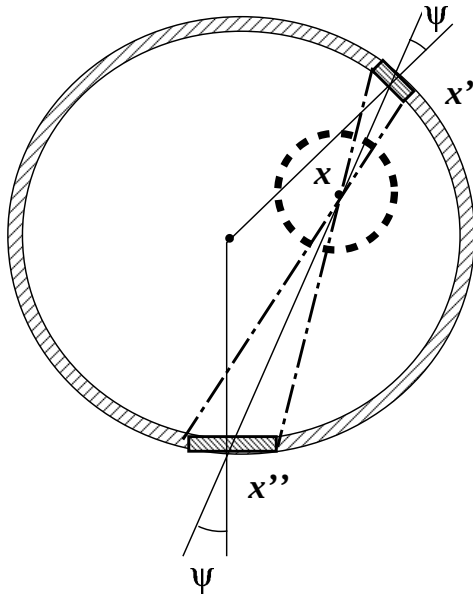
- 球内はどこでも電場が 0 であり、
- 球の外では、球殻上の総電荷量 $4\pi a^2 \sigma$ が原点に集まっている場合と同じである。

計算上は、下線部でそのことが明らかになる。その計算をゆっくりと確かめてほしい。不思議な感じがして、ちょっと自明ではないと思うが、次のように立体角の考え方からみればとても自然な感じがする。

おまけ 立体角を用いて、球殻内部に電場がないことを再考する。球殻内部の任意の位置ベクトル $\mathbf{x}$ での電場は、クーロンの法則より、

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int dS' \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int d\Omega \frac{1}{\cos \psi} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

となる。



ここで立体角の式, $d\Omega = \frac{\cos \psi}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} dS'$ を用いて, 球殻の表面の積分を立体角の積分に変換した. ここで ψ は $\mathbf{x}'$ での面の法線ベクトルと $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$ のなす角である. この積分は, 立体角に関して $\frac{1}{\cos \psi} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$ を積分するが, $\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$ は単位ベクトルであり大きさは1であることに注意すると, 観測点からみて全ての方向に関して $\frac{1}{\cos \psi}$ を積分すればよいことがわかる. さらに, ある方向 $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$ に対して, 観測点 $\mathbf{x}$ からみてちょうど反対の方向 $-\mathbf{x} + \mathbf{x}'$ が必ず存在する. **その方向の球殻部分を $\mathbf{x}''$ とすると, 球の性質より⁵, $\cos \psi(\mathbf{x}'') = \cos \psi(\mathbf{x}')$** であることがわかるので, 積分はいつでもゼロであることがわかる. ここでの議論は, ベクトルの各成分がゼロであることを示している.

2.1-10 [一様平面電荷の作る電場]:

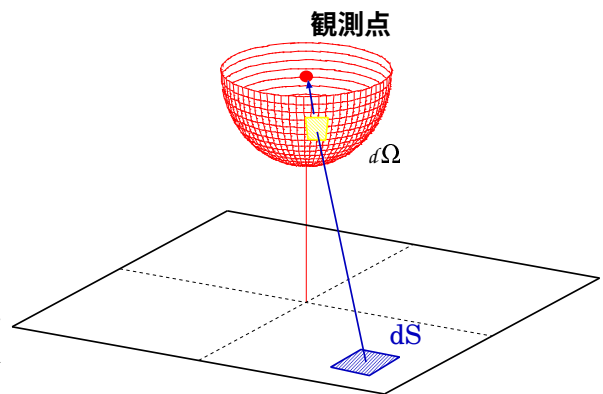
この問題もクーロンの法則を積分することで電場を求めることはできるが, ここでは立体角の考え方を使うことで, その概念を良く理解することにする. 立体角とは単位球上での見込む角度のことである. この考え方はたびたび便利ことがある.

まず, 対称性から電場の平面に水平成分はキャンセルするので, 垂直成分 E_z のみを考える.

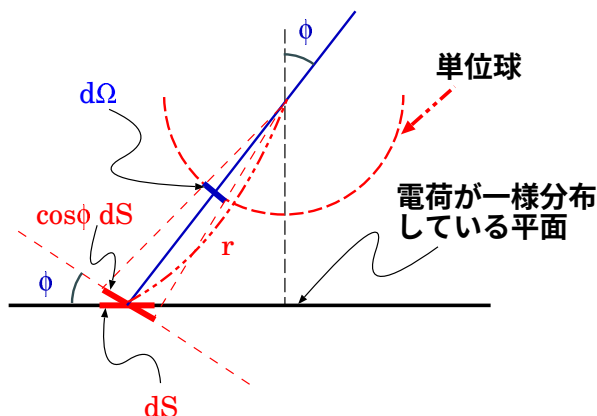
観測点から距離 r にある平面上の面積要素 dS が作る電場 dE_z は,

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma \cos \phi}{r^2} dS \quad (17)$$

ここで, σ は電荷の面密度で, ϕ は観測点からの面積要素の位置ベクトル $\mathbf{r}$ と平面となす角度である. 面積要素 dS からの寄与を観測点から見たときに, 平面全体の積分を単位球上の積分に置き換えてみる (右の図のように).



⁵ 図より, 二等辺三角形の底辺の2つの角度は等しい.



面積要素が観測点に対して張る立体角 $d\Omega$ は、観測点を中心とする単位球上の面積要素 dS を見込む表面積である。また、面積要素 dS を通る観測点を中心とする球上への dS の射影 dS' は、 $dS' = \cos \phi dS$ と表される。面積要素 dS と立体角の関係は、

$$1 : r^2 = d\Omega : \cos \phi dS$$

であることから、

$$dS = \frac{r^2}{\cos \phi} d\Omega \quad (18)$$

となる。

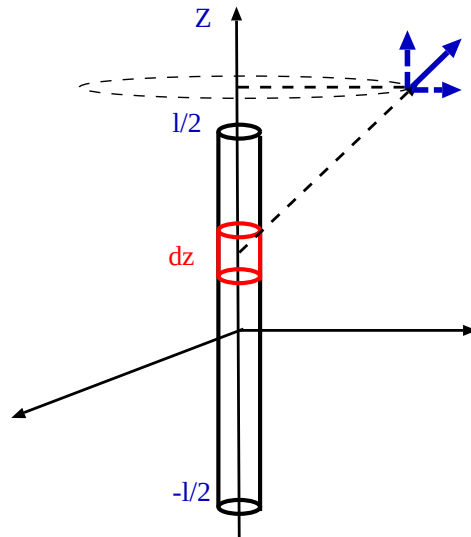
平面全体の寄与は、

$$E_z = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{平面全体}} \frac{\cos \phi}{r^2} dS = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{単位半球}} d\Omega = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} 2\pi 1^2 = \frac{\sigma}{2\epsilon} \quad (19)$$

となる。平面から見て電場が水平方向の位置に依存しないことは対称性から自明であるが、平面からの距離に依存しないのは少々不思議である。

2.1-11 [一様に帯電した直線電荷の作る電場]:

右図のように、長さ l の直線上に一様な線密度 λ で分布している電荷の作る電場を求め。ここでは、円柱座標系を用いるとよい。線要素 dz の持つ電荷 λdz が位置 (ρ, ϕ, z) に作るクーロン場を $-l/2$ から $l/2$ まで重ね合わせればよい。電場の動径方向、角度方向、鉛直方向の成分をそれぞれ E_ρ, E_ϕ, E_z とする。クーロン場の性質より、 $E_\phi = 0$ となることがわかるので、残りの 2 つをそれぞれ求めることにする。



動径成分： E_ρ

$$E_\rho = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-l/2}^{l/2} dz' \frac{\lambda(\rho - 0)}{(\rho^2 + (z - z')^2)^{3/2}}$$

↓ $(z - z' = \xi \text{ と置く.})$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\lambda \rho}{4\pi\epsilon_0} \int_{z-l/2}^{z+l/2} d\xi \frac{1}{(\rho^2 + \xi^2)^{3/2}} = \frac{\lambda \rho}{4\pi\epsilon_0} \frac{\xi}{\rho^2(\rho^2 + \xi^2)^{1/2}} \Big|_{z-l/2}^{z+l/2} \\
&= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\rho} \left[\frac{z+l/2}{\sqrt{\rho^2 + (z+l/2)^2}} - \frac{z-l/2}{\sqrt{\rho^2 + (z-l/2)^2}} \right] \quad (20)
\end{aligned}$$

この積分はチェックしておこう.

鉛直成分： E_z

$$\begin{aligned}
E_z &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-l/2}^{l/2} dz' \lambda \frac{z - z'}{(\rho^2 + (z - z')^2)^{3/2}} \\
&= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{z-l/2}^{z+l/2} d\xi \frac{\xi}{(\rho^2 + \xi^2)^{3/2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{(\rho^2 + \xi^2)^{1/2}} \right) \Big|_{z-l/2}^{z+l/2} \\
&= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z+l/2)^2}} + \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z-l/2)^2}} \right] \quad (21)
\end{aligned}$$

- (a) l が小さい極限 ($l \rightarrow 0$) の時に, 電荷分布は点電荷のようにみえるはずである. そうなることを確かめよう. もっとも, 式 (20), (21) 中の l を 0 と置いてはどちらも 0 になってしまう. 素朴に $l \rightarrow 0$ では電荷はなくなってしまう. そこで, 全電荷量 $l\lambda = Q$ を一定にして, $l \rightarrow 0$ の極限をとってみる. まずは, E_z について考えるが, l が十分小さいときにテーラー展開を使って,

$$\rho^2 + (z \pm l/2)^2 = \rho^2 + z^2 \left(1 \pm \frac{l}{2z} \right)^2 \simeq \rho^2 + z^2 \left(1 \pm \frac{l}{z} \right) = \rho^2 + z^2 \pm lz$$

であることから,

$$(\rho^2 + (z \pm l/2)^2)^{-1/2} \simeq (\rho^2 + z^2 \pm lz)^{-1/2} \simeq (\rho^2 + z^2)^{-1/2} \left(1 \mp \frac{lz}{2(\rho^2 + z^2)} \right)$$

である. これを用いて, $l \rightarrow 0$ で残る部分は

$$\begin{aligned}
E_z &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{l} \left[\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z-l/2)^2}} - \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z+l/2)^2}} \right] \\
&\simeq \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{l} \left[\frac{lz}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \right] = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{z}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \right]
\end{aligned}$$

となる. ρ は z 軸からの距離であり, $\rho^2 = x^2 + y^2$ であることに注意すると, 上の式はクーロンの法則に他ならないことがわかる. 横成分である E_ρ についても同様に示すことができる.

- (b) 線が無限に長い場合は, 式 (20), (21) より, $l \rightarrow \infty$ として

$$E_z = 0 \quad (22)$$

$$E_\rho = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 \rho} \quad (23)$$