

$$\begin{aligned}
&= \frac{\lambda \rho}{4\pi\epsilon_0} \int_{z-l/2}^{z+l/2} d\xi \frac{1}{(\rho^2 + \xi^2)^{3/2}} = \frac{\lambda \rho}{4\pi\epsilon_0} \frac{\xi}{\rho^2(\rho^2 + \xi^2)^{1/2}} \Big|_{z-l/2}^{z+l/2} \\
&= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\rho} \left[\frac{z+l/2}{\sqrt{\rho^2 + (z+l/2)^2}} - \frac{z-l/2}{\sqrt{\rho^2 + (z-l/2)^2}} \right] \quad (20)
\end{aligned}$$

この積分はチェックしておこう．

鉛直成分： E_z

$$\begin{aligned}
E_z &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-l/2}^{l/2} dz' \lambda \frac{z-z'}{(\rho^2 + (z-z')^2)^{3/2}} \\
&= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{z-l/2}^{z+l/2} d\xi \frac{\xi}{(\rho^2 + \xi^2)^{3/2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{(\rho^2 + \xi^2)^{1/2}} \right) \Big|_{z-l/2}^{z+l/2} \\
&= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z+l/2)^2}} + \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z-l/2)^2}} \right] \quad (21)
\end{aligned}$$

- (a) l が小さい極限 ($l \rightarrow 0$) の時に，電荷分布は点電荷のようにみえるはずである．そうなることを確かめよう．もっとも，式 (20)，(21) 中の l を 0 と置いてはどちらも 0 になってしまう．素朴に $l \rightarrow 0$ では電荷はなくなってしまう．そこで，全電荷量 $l\lambda = Q$ を一定にして， $l \rightarrow 0$ の極限をとってみる．まずは， E_z について考えるが， l が十分小さいときにテーラー展開を使って，

$$\rho^2 + (z \pm l/2)^2 = \rho^2 + z^2 \left(1 \pm \frac{l}{2z} \right)^2 \simeq \rho^2 + z^2 \left(1 \pm \frac{l}{z} \right) = \rho^2 + z^2 \pm lz$$

であることから，

$$(\rho^2 + (z \pm l/2)^2)^{-1/2} \simeq (\rho^2 + z^2 \pm lz)^{-1/2} \simeq (\rho^2 + z^2)^{-1/2} \left(1 \mp \frac{lz}{2(\rho^2 + z^2)} \right)$$

である．これを用いて， $l \rightarrow 0$ で残る部分は

$$\begin{aligned}
E_z &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{l} \left[\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z-l/2)^2}} - \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z+l/2)^2}} \right] \\
&\simeq \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{l} \left[\frac{lz}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \right] = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{z}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \right]
\end{aligned}$$

となる． ρ は z 軸からの距離であり， $\rho^2 = x^2 + y^2$ であることに注意すると，上の式はクーロンの法則に他ならないことがわかる．横成分である E_ρ についても同様に示すことができる．

- (b) 線が無限に長い場合は，式 (20),(21) より， $l \rightarrow \infty$ として

$$E_z = 0 \quad (22)$$

$$E_\rho = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\rho} \quad (23)$$

が示される． E_z が 0 になることは対称性から期待されることである．

2.1-12 [クーロン場の発散と回転]:

クーロン電場の場合の性質をチェックする過程で，ベクトル演算の練習をしようというのが，この問題の趣旨．式どおりできれば，示すことができる．

発散

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{\partial}{\partial x} E_x + \frac{\partial}{\partial y} E_y + \frac{\partial}{\partial z} E_z \\ &\downarrow \frac{\partial}{\partial x} E_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \quad (\Leftarrow r^2 = x^2 + y^2 + z^2) \\ &\downarrow = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{x(-3/2)2x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r^2 - 3x^2}{r^5} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{r^2 - 3x^2}{r^5} + \frac{r^2 - 3y^2}{r^5} + \frac{r^2 - 3z^2}{r^5} \right) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{3r^2 - 3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} = 0\end{aligned}$$

原点 $r = 0$ 以外ではゼロになっていることが示された⁵．

回転: x 成分について書き下してみる．

$$\begin{aligned}(\nabla \times \mathbf{E})_x &= \frac{\partial}{\partial y} E_z - \frac{\partial}{\partial z} E_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{-3yz}{r^5} - \frac{-3yz}{r^5} \right) = 0\end{aligned}$$

y, z 成分も同様である．ここでも，原点では発散しているが，それ以外ではゼロになっていることが示された．この物理的な意味は後で議論する．

2.2 電場とガウスの法則

2.2-1 [ガウスの法則の例題]:

2.1-9, 2.1-10, 2.1-11 をガウスの法則を使って電場を求めてみる．

球殻電荷のつくる電場

電荷が球対称なので，電場も球対称である．つまり，電場の大きさは中心からの距離にのみ依存し，方向は動径方向である．その大きさを E_r とする．ガウスの閉曲面を半径 r の同心球とする．その球面上で電場の大きさは一定で， E_r であり，その方向は球面に垂直である．つまり，このガウスの閉曲面で選んだ球面の法線ベ

⁵ガウスの法則との関係はどうなっているのだろうか？

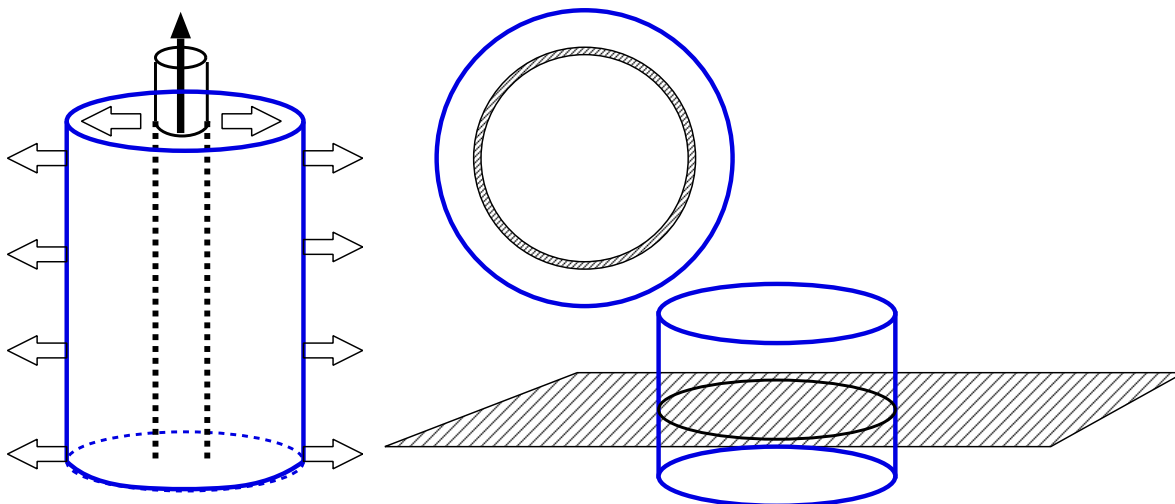


図 3: ガウスの法則で使う閉曲面の例

クトルと平行である． r と電荷球の半径 a の大小関係でガウスの法則の右辺が変わることに注意して，ガウスの法則を使うと，

$$\int_{\text{球面}} dS \mathbf{n} \cdot \mathbf{E} = E_r \int dS = E_r 4\pi r^2 = \int_{\text{球}} dV \frac{\rho}{\epsilon_0} = \begin{cases} \frac{4\pi a^2 \sigma}{\epsilon_0} & \text{for } r > a \\ 0 & \text{for } r < a \end{cases}$$

であるから，求める電場 E_r は $E_r = \frac{\sigma a^2}{\epsilon_0 r^2} \theta(r - a)$ である．これは，2.1-9 の式 (16) と一致している．

平面電荷のつくる電場

この電場については，次の問題で詳しくみることにする．

直線電荷のつくる電場

簡単のために，電荷は λ を線密度とする無限に長い直線電荷とする．直線電荷を z 軸にとると， z 軸を中心に回転対称性がある．つまり，どこに x 軸， y 軸をとっても同じようにみえる．さらに， z 軸のどの値の平面もやはり同じに見える．このことから，電場の大きさ E_r は z 軸から距離だけの関数で，その方向は動径方向であることがわかる．

ガウスの法則で使う閉曲面は z 軸を中心とした半径 r の円柱をとることにする． z 軸方向の高さは l とする．円柱の上下の蓋の部分の法線ベクトルは z 軸に平行であるが，電場はそれと垂直な動径方向であるので ($\mathbf{n}_{\text{上下の蓋}} \cdot \mathbf{E} = 0$)，ガウスの法則への寄与はない．一方で，側面ではいつでも面の法線ベクトルとは平行である ($\mathbf{n}_{\text{側面}} \cdot \mathbf{E} = E_r$)．これらに注意して，ガウスの法則を使うと，

$$\int_{\text{円柱の面}} dS \mathbf{n} \cdot \mathbf{E} = \int_{\text{側面}} E_r dS = E_r 2\pi r l = \int_{\text{円柱内}} dV \frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{\lambda l}{\epsilon_0}$$

であるから，求める電場 E_r は $E_r = \frac{\lambda a^2}{2\pi\epsilon_0 r}$ である．もちろんこれは 2.1-11 の式 (23) と一致している．

2.2-2 [平板電荷の電場について]:

この問題は，ガウスの法則を使うことによって，電場を計算する練習問題である．まずは無限に広がった場合を考えることにする．この手の問題を考える手順は以下のとおりである⁶．

- (a) 問題の対称性を考えて，存在する電場の成分を見極める．対称性がよい場合というのはいくつかの成分 (x 成分とか y 成分とか) がキャンセルされてゼロになっていることが多い．
- (b) 都合のよい閉曲面を見付けて，ガウスの法則を当てはめてみる．ここで，都合がよいというのはどういうことだろうか．ガウスの法則は，任意の閉曲面から湧き出した総電場が閉曲面内部の総電荷量に等しいことを言っている．実際に当てはめてみるには，閉曲面からのわきだし (発散)，すなわち，電場の閉曲面に対する法線成分を面全体に渡って積分しなくてはならない．「都合がよい」というのはこれがサボれるという意味である．つまり，閉曲面の電場の法線成分がどこでも同じであるか，電場と面の法線ベクトルが垂直になっていてゼロであると、「都合良く」計算できるわけである．

対称性の考察

まず，並進操作に対して不変性がある．ちょっと格好付けて難しい言葉を使ってみたが，内容は大きなことはない．平面に平行な方向に対してはどこも特別な点はない．このことから，電場は平面からの距離だけにしか依らないことがわかる．そこで，適当な場所に z 軸を設定し，その軸上での電場を求めることは一般性を失わない．右図から平面に平行な方向は必ずキャンセルされ，垂直な成分 E_z しか存在しないことがわかる．

ガウスの法則の当てはめ

いま，閉曲面として，断面積 A の円筒を選び，上下の両底面を帯電平面に平行にとる．上下の底面をそれぞれ， S_1, S_3 として，側面を S_2 とする．この閉曲面に対してガウスの法則を当てはめる．

$$\int_{\text{閉曲面 } S} dS \mathbf{n} \cdot \mathbf{E} = \int_{S_1} dS \mathbf{n} \cdot \mathbf{E} + \int_{S_2} dS \mathbf{n} \cdot \mathbf{E} + \int_{S_3} dS \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}.$$

ここで，側面 S_2 に法線方向は帯電面に平行であるから，その電場の成分はないので，第 2 項は消える．上下底面での法線成分は E_z であり，面上の場所には依存し

⁶ こういうと，なんだか問題を解くためのテクニックのようだが，そうではなくて，考え方を示していると思って欲しい．これでうまくいくこともあれば，いかないこともある．後者の方が多いくらいである．

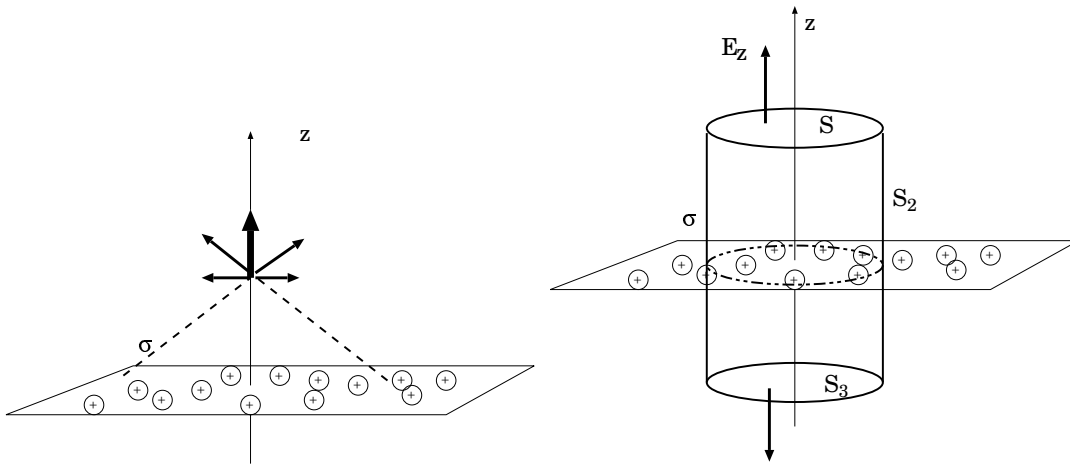


図 4: (左) 電場の xy 成分がキャンセルする様子 . (右) ガウスの法則のあてはめ . 閉曲面は円筒とした .

ないことから ,

$$\int_{\text{閉曲面 } S} dS \mathbf{n} \cdot \mathbf{E} = \int_{S_1} dS E_z + \int_{S_3} dS E_z = 2A E_z.$$

一方で , 閉曲面に囲まれた領域に存在する総電荷量は $A\sigma$ であるから ,

$$2A E_z = A\sigma / \epsilon_0 \implies E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad \text{あるいは} \quad \mathbf{E} = \left(0, 0, \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\right) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{\mathbf{z}}{|\mathbf{z}|} \quad (24)$$

少し驚いたことに , この電場は平面からの距離に依存しない . もはや選んだ閉曲面は円筒でなくてもよいことがわかる . これを二枚合わせて平板コンデンサーを作るのは次の問題である .

さて , 帯電平面が無限でない場合にどうなるかを考えてみよう . まず , 有限であることから , 並進の対称性は無くなってしまう . 例えば平面が正方形の場合は , 観測位置を平行移動するともはや元の位置とはずれてしまっている . 結果として , 図 4(左) のように必ず電場の水平成分をキャンセルする相棒がいる保証はない . 唯一水平成分がキャンセルする位置は , ちょうど正方形の中心だけである . それ以外では水平成分は残る . もちろん , ガウスの法則はこの場合にも成立する . このとき , 上と同様な閉曲面を考えた場合 , 側面からも電場のわきだしがあり , しかも側面の位置に依存していて , その積分を評価するのは大変面倒になる . ここまでくると , 先になぜガウスの法則だけから電場が求まることがあるのか? という問いに答えられるであろう .

2.2-3 [二枚の平板電荷]:

この問題の電場は , 前問の結果を重ね合わせて求めることができる . 最も簡単なコンデンサーになっている . 平板は無限に広いと仮定しているので , 前問より重

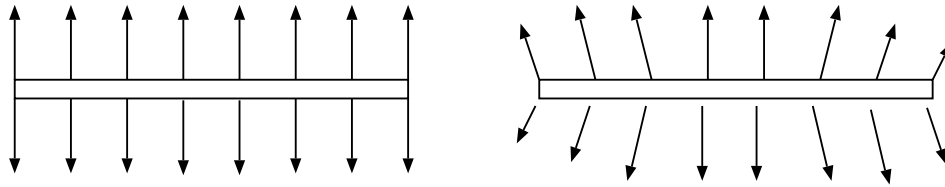


図 5: イメージすぎる図? . ちょっとあまりにもひどいので, みなさんで描いて見て下さい. 左は無限に広がった平板の例. 有限の場合 (右) は 無限からのずれとして, 平板に水平成分が端の近くで顕著に現れる.

ね合わせの原理から, $E_z = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ となる. 一様な電場が平板の間にのみ, 面に垂直な方向に存在する. 平板の外側では電場はキャンセルしてゼロになる.

このとき, 二枚の平板の間の電位差 ΔV は,

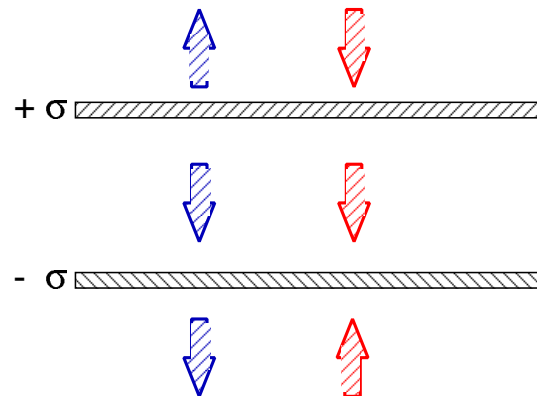
$$\Delta V = \int d\mathbf{x} \cdot \mathbf{E} = \int_0^d dz E_z = \frac{\sigma d}{\epsilon_0}$$

となる.

また, 平板の面積を S として, それぞれの平板に与えた電荷を $\pm q$ とすると, 電位差は, $\Delta V = \frac{qd}{\epsilon_0 S}$ となる. このコンデンサの電気容量は,

$$C = \frac{q}{\Delta V} = \frac{\epsilon_0 S}{d}$$

である.



2.2-4 [一様に帯電している円柱の作る電場]:

この問題ではガウスの法則の使い方に対する注意を与えるのが主な趣旨である.

(1) どんな閉曲面を選んだのか, (2) それぞれの面での積分の寄与はどうなっているか, を注意して考えたい.

(a) 簡単のために円柱は無限に延びていることにする. 円柱の対称性のために, 電場の動径方向⁷以外の成分は全てキャンセルしている. 電場の動径成分は中心軸からの距離だけの関数になっているので, それを $E_r(x)$ とする. 円柱に平行な半径 r , 高さ l の筒を閉曲面として選ぶと, その側面での E_r は全て同じ値を持ってい

⁷中心から放射状に向く方向

る．また，筒の上面と下面に垂直な電場は存在していないので，そこからの寄与はない．ここでガウスの法則より，

$$\int dS \mathbf{n} \cdot \mathbf{E} = 2\pi r l E_r = \int dV \frac{\rho}{\epsilon_0} = \begin{cases} \frac{l\pi r^2 \rho}{\epsilon_0} & \text{for } r \leq a \\ \frac{l\pi a^2 \rho}{\epsilon_0} & \text{for } r \geq a \end{cases}$$

となり，まとめると，

$$E_r = \begin{cases} \frac{r\rho}{2\epsilon_0} & \text{for } r \leq a, \\ \frac{a^2\rho}{2r\epsilon_0} & \text{for } r \geq a \end{cases} \quad (25)$$

円柱の外から見た答えは，全ての電荷を中心線上に集中し，線密度 $\lambda = \pi a^2 \rho$ の作る電場

$$E_r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

と同じと見ることも出来る．

(b) 空洞を作るということは反対電荷の円柱を埋め込むと考えることができる．そこで，反対符号の電荷密度を持った半径 b を円柱を前問の円柱に埋め込む状況を考える．前問の答えから，一様な電荷密度 $-\rho$ をもった円柱の作る電場 E'_r は，

$$E'_r = \begin{cases} -\frac{r\rho}{2\epsilon_0} & \text{for } r \leq b \\ -\frac{b^2\rho}{2r\epsilon_0} & \text{for } r \geq b \end{cases} \quad (26)$$

となる．

(c). ここでは円柱が同心円柱でなくなった場合に，くりぬいた部分がどのようになるかを考察してみる．以下では典型的な(誤)解答例を示す．

「円柱の外から見ると，その内部にある総電荷量は (b) と同じなので，電場も (b) と同じである．」

ガウスの法則の右辺は穴がずれていても，外から見ている限りはいつでも同じである．しかしながら，この解答は左辺について誤解している．左辺は， $\int dS \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}$ であるが，もはや対称性がないので，例えば筒型の閉曲面を選んだときに，その面の法線ベクトル $\mathbf{n}$ と電場 $\mathbf{E}$ は平行ではなく，また筒の場所にも依存するので，この積分を評価することは難しい．

「くりぬいた部分の中に閉曲面を考えると，その中には電荷は無いので，電場がゼロであることがわかる．」

ここではガウスの法則の右辺は正しく評価されていて，ゼロであるが，左辺は電場の湧き出し総量なので，それがゼロであることしかわからない．出入りがゼロであるだけであって，出て行く量あるいは入ってくる量がゼロであることはわからない．

重ね合わせの原理より，式 (25)，(26) を足せばよく，

$$E_r^{\text{tot}} = \begin{cases} 0 & \text{for } r \leq b \\ -\frac{b^2\rho}{2r\epsilon_0} + \frac{r\rho}{2\epsilon_0} & \text{for } b \leq r \leq a \\ -\frac{b^2\rho}{2r\epsilon_0} + \frac{a^2\rho}{2r\epsilon_0} = \frac{\rho}{2r\epsilon_0}(a^2 - b^2) & \text{for } r \geq a \end{cases} \quad (27)$$

が得られる．重ね合わせの原理は，存在する電荷にだけでなく，このような架空の電荷についても成り立っているが，電場の大きさについてではなく，ベクトルの重ね合わせであることに注意が必要である．

もちろん，最初からガウスの法則を用いることで，(a) と同様に得られるが，このように重ね合わせの原理を使うと次の問題が考えやすい．

「対称性がずれてしまったので，ガウスの法則は使えない」

これはある意味で正しい．ただ，重ね合わせの原理を使うことを考えると，円柱とくりぬくべき円柱のそれぞれは綺麗な対称性を持っている．それぞれの作る電場をガウスの法則で求めておいて，重ね合わせることができる．

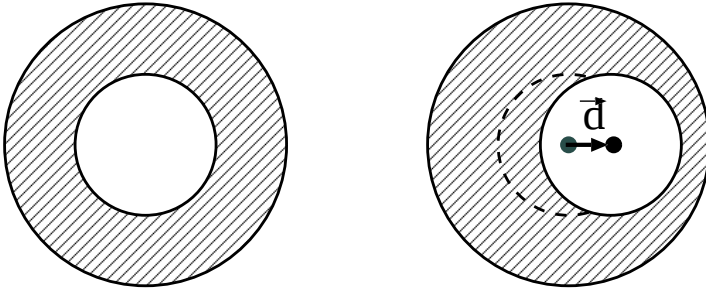


図 7: 円柱を上から見た図．同心円になっている場合 (左) とベクトル d だけずれている場合 (右)

さて，重ね合わせの原理を用いて，具体的に電場を求めてみることにする．原点を半径 a の円柱の中心にとり，(a) の結果をベクトルで表せば，

$$E_a(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{|\mathbf{x}|\rho}{2\epsilon_0} \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \mathbf{x} & \text{for } |\mathbf{x}| \leq a \\ \frac{a^2\rho}{2|\mathbf{x}|\epsilon_0} \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} = \frac{a^2\rho}{2\epsilon_0} \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^2} & \text{for } |\mathbf{x}| \geq a \end{cases} \quad (28)$$

である．くりぬいた円柱の中心のずれベクトルを d とすると，同様に式 (26) は，

$$E_b(\mathbf{x}) = \begin{cases} -\frac{\rho}{2\epsilon_0} (\mathbf{x} - \mathbf{d}) & \text{for } |\mathbf{x} - \mathbf{d}| \leq b \\ -\frac{b^2\rho}{2\epsilon_0} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{d}}{|\mathbf{x} - \mathbf{d}|^2} & \text{for } |\mathbf{x} - \mathbf{d}| \geq b \end{cases} \quad (29)$$

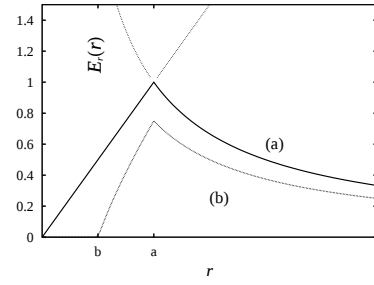


図 6: 電場の動径成分 E_r の r 依存性．縦軸の単位は， $a\rho/(2\epsilon_0)$ ．(a) と (b) の結果をそれぞれ示してある．