

となる．これらを重ね合わせればよい．

$$E_{\text{tot}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{\rho}{2\epsilon_0} \mathbf{x} - \frac{\rho}{2\epsilon_0} (\mathbf{x} - \mathbf{d}) = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \mathbf{d} & \text{for 円柱の内部でかつ空洞の中} \\ \frac{\rho}{2\epsilon_0} \mathbf{x} - \frac{b^2 \rho}{2\epsilon_0} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{d}}{|\mathbf{x} - \mathbf{d}|^2} & \text{for 円柱の内部でかつ空洞の外} \\ \frac{a^2 \rho}{2\epsilon_0} \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^2} - \frac{b^2 \rho}{2\epsilon_0} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{d}}{|\mathbf{x} - \mathbf{d}|^2} & \text{for 円柱の外部でかつ空洞の外} . \end{cases} \quad (30)$$

もはや，空洞の内部で電場がゼロとはなり得ないことはわかったであろう．しかしながら少し驚いたのは，空洞内の電場がずれベクトル $\mathbf{d}$ に比例して，しかも一定であることである．空洞内で一定なベクトルであれば，空洞内に筒状の閉曲面を考えると，その面についてのわきだし量はゼロになることは確かに示すことはできる．

2.2-5 [ガウスの法則だけから電場のルールが全て決まらないこと]:

この問題は，ガウスの法則とクーロンの法則が完全に一致しているわけではないことを議論している．まずは，数学の問題から示そう．ガウスの法則を満たす電場 $\mathbf{E}$ に適当なベクトル場 $\mathbf{A}$ の回転 $\nabla \times \mathbf{A}$ を加えたベクトル場 $\mathbf{E}'$ の発散は，

$$\nabla \cdot \mathbf{E}' = \nabla \cdot (\mathbf{E} + \nabla \times \mathbf{A}) = \frac{\rho(\mathbf{x})}{\epsilon_0} + \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A})$$

となる．ここで最後の式の第二項は問題 2 よりゼロになることがわかっているから，このベクトル場 $\mathbf{E}'$ もガウスの法則を満たしていることがわかる．すなわち，ガウスの法則を満たすベクトル場を一つ見つけてくると，それに好きなベクトル場の回転を加えることで，いくらでもガウスの法則を満たす場を作ることができることになり，一意的に決定することはできない．偽物の電場ベクトルをいくらでもつくることができてしまうことになる．このことから，ガウスの法則がクーロンの法則の全ての性質をもっているわけではないことがわかる．これはどういうことなのか．

少し考えてみると，クーロンの法則は重ね合わせの原理と合わせることで，電荷がある場合に電場を与えてくれる法則である．電場はベクトルであるから，3つの成分を持っている．一方で，ガウスの法則はスカラーの恒等式になっている．結局は，3つの未知の変数に対して，1つの方程式 (ガウスの法則) しかわかっていないために，全ては決定できないということになっているわけである．

ここで，すぐに幾つかの素朴な疑問が浮かぶであろう．例えば，すぐ後に見るように，ガウスの法則を用いて電場を求めることができる例がある．あるいは，講義で示した例題でも，ガウスの法則だけから，電場を計算してみせた．これはなぜだろうか．

では，残された条件はどこかと言えば，クーロンの法則で決まる電場にその性質が残されているわけだが，その条件式は $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ である．この関係式は実際に 2.1-12 の式から確かめることが出来る．この続きは次の問題で考えることにする．

2.2-6 [ガウスの法則と渦無しの法則から ...]:

問題は，

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0 \quad (31)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (32)$$

これらからクーロンの法則が出てくるか，あるいは， $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$ が決まるか，というのが問いである．少し難しい問題なので，以下では簡便版の答えを示すことにする．まず，知りたい変数が3つで，決めるべき条件式が4つあるように見える．そうだとすれば，条件が多すぎるような気がするが，2つの式を合わせると $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = 0$ はどのような $\mathbf{E}$ に対しても成り立つために，実は4つの条件は独立ではなく，この恒等式のおかげで条件は一つ減っていることになる．結果として，ちょうど3つの自由度が残っている．

さて，式 (32) から，ポテンシャル ϕ を定義できることは講義で示した．

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\nabla \phi(\mathbf{x}) \quad (33)$$

そして，このポテンシャルを式 (32) に代入することで，ポテンシャルの満たすべき方程式 (ラプラス方程式) が

$$\nabla \cdot (-\nabla \phi(\mathbf{x})) = -\nabla^2 \phi(\mathbf{x}) = \frac{\rho(\mathbf{x})}{\epsilon_0} \quad (34)$$

出てくる．この方程式を解いて，その特解がクーロン電位になることを示すのは少々技術が必要である．しかし，クーロン電位が解になっていることを確かめることは比較的容易である．ここではそれを具体的に示してみる．電荷が連続に分布している場合のクーロン電位は，

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (35)$$

である．これが式 (34) の解になっていることを確かめる．

$$\begin{aligned} -\nabla^2 \phi(\mathbf{x}) &= -\nabla^2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \rho(\mathbf{x}') \nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \\ &\downarrow \left(\text{ここで } \nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = -\nabla \cdot \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} = \nabla' \cdot \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \right) \\ &\downarrow \left(\text{ここで } \nabla' \text{ は } \mathbf{x}' \text{ での偏微分} \right) \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \rho(\mathbf{x}') \nabla' \cdot \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\downarrow \text{ また, 下線部は練習問題 2.1-12 で示したように } \boldsymbol{x}' \neq \boldsymbol{x} \text{ では } 0 \text{ である.} \\
&\downarrow \text{ 積分に寄与があるのは } \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} \text{ だけなので, その } \boldsymbol{x} \text{ 近傍の半径 } a \text{ の積分を考える.} \\
&= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\rho(\boldsymbol{x}) \int_{\boldsymbol{x}' \text{ 近傍の微小球}} d^3x' \nabla' \cdot \frac{(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|^3} \\
&\downarrow \text{ ガウスの定理と立体角の計算をすると,} \\
&= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\rho(\boldsymbol{x}) \int_{\boldsymbol{x}' \text{ 近傍の微小球面}} dS' \boldsymbol{n} \cdot \frac{(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|^3} \\
&= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\rho(\boldsymbol{x})(-4\pi a^2)\frac{a}{a^3} = \frac{\rho(\boldsymbol{x})}{\epsilon_0}
\end{aligned} \tag{36}$$

このポテンシャルから電場を求めると, クーロンの法則になる. 後は, これが無限遠で 0 になる条件を加えて, 唯一の解であることを示せばよいですね. それはみなさんやってみましょう.

2.2-7 [ガウスの法則 (再度)+電位]:

まずは, 対称性の考察をしてみる. 球全体に一様に分布しているので, 電荷分布は球対称である. どの方向から見ても同じようにみえるわけである. それゆえに, 電場も球対称であり, 電場は動径成分 $E_r(r)$ ⁹ しかない. また, 球の中心を原点として, そこからの距離にしか依存しない.

いま, 閉曲面として, 同心の半径 r の球を考える. その球面上では電場はどこでも法線方向, すなわち球面と垂直方向であり, 大きさは一定である. そこで, ガウスの法則を当てはめてみる. 左辺は,

$$\int_{\text{半径 } r \text{ の球面}} dS \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{E} = \int_{\text{半径 } r \text{ の球面}} dS E_r = E_r 4\pi r^2$$

となる. 一方で右辺は, 電荷密度を ρ として,

$$\int_{\text{球}} dV \frac{\rho}{\epsilon_0} = \begin{cases} \frac{4\pi\rho}{3\epsilon_0} r^3 & \text{for } r < a \\ \frac{4\pi\rho}{3\epsilon_0} a^3 & \text{for } r \geq a \end{cases}$$

となる. まとめると, 電場は動径成分しかなく, 原点からの距離 r の関数として,

$$E_r(r) = \begin{cases} \frac{\rho}{3\epsilon_0} r & \text{for } r < a \\ \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 r^2} & \text{for } r \geq a \end{cases} \tag{37}$$

である. 総電荷量を q とすれば, $q = 4\pi\rho a^3/3$ なので, これは,

$$E_r(r) = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{a^3} & \text{for } r < a \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & \text{for } r \geq a \end{cases} \tag{38}$$

⁹これはベクトル場である電場 $\boldsymbol{E}$ の動径成分なのでスカラーである. その成分として, 添字 r をつけた. 引数の r は位置ベクトルを表しており, 球の中心を原点にとっておく.

と表すこともできる．これは，球の外側の電場は，あたかも全電荷が原点に集結しているように見える．

電位は電場を積分すればよい．電位も電場と同様に球対称な関数であるので，距離 r の関数として求める．まずは， $r \geq a$ の時は，

$$\phi(r) \equiv - \int^r dx \cdot E = - \int_{\infty}^r dr' E_r = - \int_{\infty}^r dr' \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 r'^2} = \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 r'} \Big|_{\infty}^r = \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 r}$$

となり， $r \leq a$ のときは，その続きを積分すればよい．

$$\phi(r) = \phi(a) - \int_a^r dr' E_r(r') = \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 a} - \int_a^r dr' \frac{\rho}{3\epsilon_0} r' = \frac{\rho a^2}{3\epsilon_0} - \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{r'^2}{2} \Big|_a^r = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(\frac{3a^2}{2} - \frac{r^2}{2} \right)$$

まとめると，電位 $\phi(r)$ は，

$$\phi(r) = \begin{cases} \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 r} & \text{for } r \geq a \\ \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(\frac{3a^2}{2} - \frac{r^2}{2} \right) & \text{for } r \leq a \end{cases}$$

となる．

電場と電位の大きさのグラフを図 8 に示しておく．

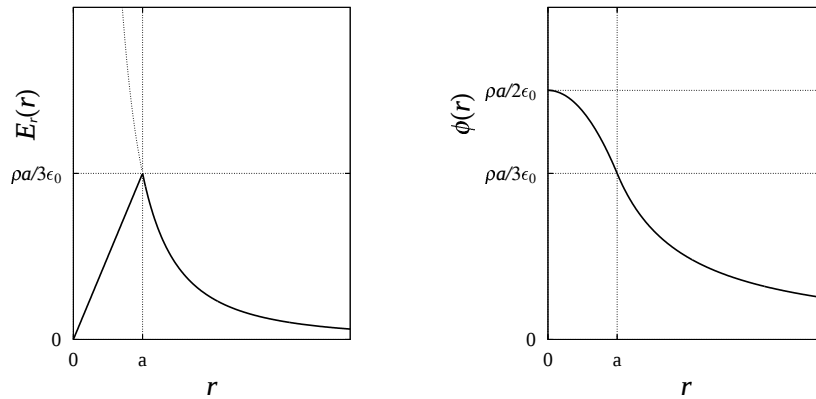


図 8: 電場の動径成分 (左) と電位 (右) の原点からの距離依存性¹⁰．

¹⁰ グラフを書くときの一般的な注意事項

- (a) 縦軸と横軸の意味を書く．
- (b) スケールが分かるように，代表的な座標を明示する．
- (c) 曲線の凸凹に注意する，上に凸か下に凸かを間違えないように．

2.2-8 [電気双極子]:

電場と同様に電位も重ね合わせの原理から二つの電荷の電位を足し合わせることで求まる．また，電位から電場は grad すれば求まる．ここでは電位から電場を求める練習問題です．

1. それぞれの電荷が持っているクーロン電位を2つ重ね合わせることで全体 $\phi(\mathbf{x})$ の電位を求める．

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-a)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+a)^2}} \right] \quad (39)$$

位置 $|\mathbf{x}|$ が電荷間の距離 $2a$ に比べて非常に大きい時にどのようなになるかを考える．まずは， $a/z \ll 1$ として， $a/z = 0$ の回りでの展開すると，

$$(z \pm a)^2 = z^2 \left(1 \pm 2a/z + O\left((a/z)^2\right) \right) \simeq z^2 \pm 2az$$

であるから，クーロン電位のそれぞれの項は，

$$(x^2 + y^2 + (z \pm a)^2)^{-1/2} \simeq (x^2 + y^2 + z^2 \pm 2az)^{-1/2} \simeq \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \mp \frac{az}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

となり，式 (39) は，

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}) &\simeq \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2az}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ &\downarrow \text{ここで } \mathbf{p} = (0, 0, 2aq), \mathbf{R} = (x, y, z) \text{ を使えば,} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3} \end{aligned} \quad (40)$$

となる．これは電気双極子と呼ばれている系であり， $\mathbf{p}$ を電気双極子モーメントと呼ぶ．

2. 続けて，この電位から電場を求めてみる． $|\mathbf{p}| = p = 2aq$ として，

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial}{\partial x} \phi = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3xz}{|\mathbf{R}|^5}, \\ E_y &= -\frac{\partial}{\partial y} \phi = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3yz}{|\mathbf{R}|^5}, \\ E_z &= -\frac{\partial}{\partial z} \phi = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\mathbf{R}|^3} - \frac{3z^2}{|\mathbf{R}|^5} \right). \end{aligned}$$

となる．ところで，こんな双極子とは何なのよ．というのは，自然な疑問である．意味も分からずにこんな計算させられるのは拷問のようかも知れない．正負の電荷