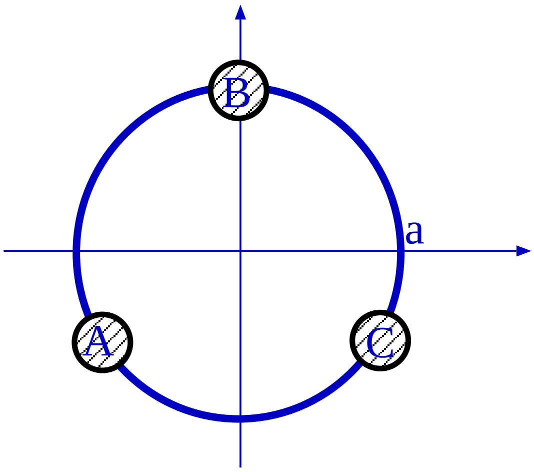
第一回電磁気Bレポート問題解答例

問題1 (練習問題 **1-1.6**)

　電場をベクトルとして考える習慣になれることが，この問題の趣旨である．

　1．つりあいの位置

直観的には正三角形に並べるのがよさそうに思う．実際に正三角形の頂点の位置に電荷を置いて，それらのクーロン力の合力を求めてみると，少なくとも接線方向には力はつりあっていることが示される．



　少しだけ捕捉をしておく．まず，一般性を失うことなく，3つの電荷のうちの一つの座標を y 軸上に座標 $(0, a)$ 置くとするとする．この電荷が静止するためには，接線方向の力、つまり残りの2つから働くクーロン力の合力のうち x 成分がゼロになっていることが必要である．y 成分はリングの拘束力がそれを支えてくれる．図のように B を y 軸上に置いたとすると，残りの A,C の位置をそれぞれ，(x_A, y_A), (x_C, y_C) とする．もちろん，リング上にあるので，$x_A^2 + y_A^2 = x_C^2 + y_C^2 = a^2$ である．このとき，B に働く力の x 成分, F_x は,

$$F_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{x_A}{(x_A^2 + (y_A - a)^2)^{3/2}} + \frac{x_C}{(x_C^2 + (y_C - a)^2)^{3/2}}\right)$$

となり，これが0になる条件を解くと，$y_A = y_C$ であることが導かれる．つまり，y 座標の値が共通であれば，どこでもよいことになる．これが，B が静止するための条件である．一方で，A, C も静止する必要があるので，同じ議論をすれば，A から見たときの B,C の距離も同じところにあればよく，C についても同様である．結局，全てが等距離になるときに接線方向の力はつりあうことがわかる．

　2．中心部分の電場 電荷は正三角形に並ぶことがわかったので，それらの3つの電荷が原点に作る電場はそれぞれの電場を重ね合わせればよい．

問題2:「ベクトル演算の練習」

　これは具体的にベクトル場の演算を計算する練習である．順に示していく．

2-1. ベクトルの成分をそれぞれ $\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z)$，$\boldsymbol{B} = (B_x, B_y, B_z)$ として，左辺から計算すると，

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (A_y B_z - A_z B_y, A_z B_x - A_x B_z, A_x B_y - A_y B_x) \\
&= \frac{\partial A_y}{\partial x} B_z + A_y \frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial A_z}{\partial x} B_y - A_z \frac{\partial B_y}{\partial x} + \frac{\partial A_z}{\partial y} B_x + A_z \frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{\partial A_x}{\partial y} B_z - A_x \frac{\partial B_z}{\partial y} \\
&\quad + \frac{\partial A_x}{\partial z} B_y + A_x \frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{\partial A_y}{\partial z} B_x - A_y \frac{\partial B_x}{\partial z}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= B_x\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)+B_y\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+B_z\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \\
&\quad -A_x\left(\frac{\partial B_z}{\partial y}-\frac{\partial B_y}{\partial z}\right)+A_y\left(\frac{\partial B_x}{\partial z}-\frac{\partial B_z}{\partial x}\right)+A_z\left(\frac{\partial B_y}{\partial x}-\frac{\partial B_x}{\partial y}\right)=\text{右辺}
\end{aligned}
$$

となり，恒等式を示すことができる．注意すべきは，ナブラは普通のベクトルではなく，微分演算子であることである．

2-2. これも定義に従って計算する．

$$
\begin{aligned}
A_x &= \frac{\partial}{\partial x}\log\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)=\frac{\frac{1}{2}2x(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)} \\
A_y &= \frac{\partial}{\partial y}\log\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)=\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)} \\
A_z &= \frac{\partial}{\partial z}\log\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)=\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)}
\end{aligned}
$$

このベクトル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ はクーロンの電場に似ているが，異なる．中心力であるところは共通であるが，その大きさは距離に二乗ではなくて，一乗に反比例している．確かめてみよう．

<u>**問題 3** これは (練習問題 **2-1.4**)</u> に簡単にまとめてある．個別の対応はそれぞれに返答することにして，興味深い解答はどこかで公表することにする．

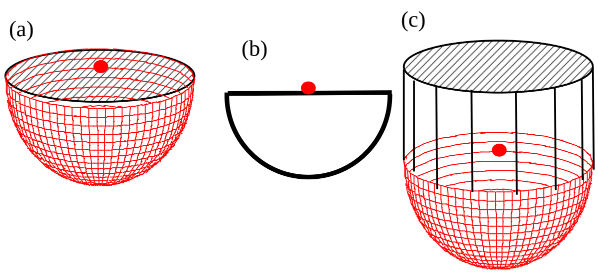
<u>第二回電磁気 B レポート問題</u>

福島孝治 (東京大学大学院総合文化研究科)

平成 20 年 11 月 13 日: ver. 1.1

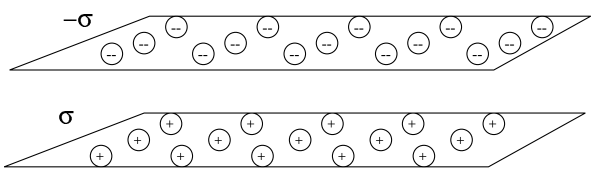
問題 1 「ガウスの法則について」: 電荷量 q の点電荷のつくる電場について以下の問いに答えよ．下図のように●で示された点電荷から無限小離れた位置に半径 a の円で蓋をしたような半球からなる閉曲面を考える．点電荷の位置は円の中心から無限小にある．(a) は斜めから見た図で，(b) は真横から見た図を表している．点電荷は閉曲面の外側にある．

1. 半径 a の半球部分 (閉曲面から蓋の部分を除いた面) を貫く電場 (電束) を求めよ．電束 ϕ は，電場ベクトルを $\boldsymbol{E}$ として，$\phi = \int dS\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E}$ で定義される．
2. 半径 a の円盤部分 (閉曲面の蓋) を貫く電場 (電束) を求めよ．
3. 次に，図 (c) のように円盤の代わりに，円筒型の蓋を半球とくっつけた閉曲面で点電荷を囲んでみた．このときに円筒型の蓋を貫く電場 (電束) を求めよ．



問題 2 「二枚の平板電荷について」: それぞれ正と負に一様に帯電した無限に広い平板が距離 d だけ離れて平行に置かれている．それぞれの面密度は $+\sigma, -\sigma$ とする．

1. ガウスの法則を用いて，この二枚の平板電荷の作る電場を求めよ．解答だけでなくて，そこに至る過程も詳しく説明すること．ガウスの法則の証明は必要ないが，どのように法則を当てはめたのかを説明すること．
2. また，この二枚の平板の近くでの電気力線を描け．
3. 平板が無限でなくなったときには，上の解答とは異なるが，どのように修正されるのかを定性的に答えよ．



問題 3 「講義について」: ここまでのこの講義について意見や感想があれば自由に述べよ．

〆切は 3 週間後 (12 月 4・5 日) とする．