

物理学 (電磁気学) 解答例編

福島孝治 (東大院総合文化)

Ver. 1.0:	2007.10.10	初版
Ver. 1.1:	2007.11.4	1.1 章まで
Ver. 1.11:	2007.11.7	若干の加筆修正
Ver. 1.2:	2007.11.22	1.2 への加筆
Ver. 1.21:	2007.11.28	若干の修正
Ver. 1.22:	2007.12.14	1.3 を加筆
Ver. 1.23:	2008.2.4	修正

1 静電場の世界

1.1 電荷の存在・クーロンの法則

- 1.1-1 [電荷量]: 桁が大きくちがう量を実感的に理解するには訓練が必要である。ここではその例題として電荷量を考えてみることにする。題意に従って、数値を計算してみると、求める電荷量は、

$$\frac{10[\text{g}]}{63.5[\text{g/mol}]} \times 6.02 \cdot 10^{23}[\text{mol}^{-1}] \times 1.60 \cdot 10^{-19}[\text{C}] \simeq 1.52 \times 10^4[\text{C}]$$

となる。実際には銅からこんな電荷をはぎ取ることは不可能である。下敷をこすって発生できる静電気は高々 $10^{-6}\text{C} = \mu\text{C}$ 程度である。

- 1.1-2 [クーロン力]: クーロン力の大きさに関して数値を計算してみる問題である。

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r^2} = \frac{1}{4 \cdot 3.14 \cdot 8.9 \times 10^{-12}\text{C}^2/\text{Nm}^2} \frac{1\text{C}^2}{1\text{m}^2} \simeq 9.0 \times 10^9\text{N}$$

1Kg の質量に働く地球上での重力の大きさが $9.8[\text{N}]$ であることから、上の力は $9.2 \times 10^8\text{Kg} = 9.2 \times 10^5\text{ton}$ の質量に働く重力に相当することがわかる。

- 1.1-3 [水素原子でのクーロン力の強さ]: 問題の意図はクーロン力の強さを見てみようということである。単純に数値を入れれば答えは出てくる。古典的力学の範囲では、水素原子は陽子の回りを回転していると考え、二つの距離を r とすると、クーロン力は、

$$\text{クーロン力} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

であり、万有引力は、

$$\text{万有引力} = G \frac{m_p m_e}{r^2}$$

となる。その比は、それぞれ数値を入れれば、

$$\frac{\text{クーロン力}}{\text{万有引力}} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 G m_p m_e} \simeq 2.2 \times 10^{39} \simeq \frac{1}{4.5 \times 10^{40}} \quad (1)$$

となり、クーロン力が圧倒的に大きいことがわかる。かなり大きな値なので、逆に実感は沸かない。また、このような比較がいいのかどうかもよくわからない。似たような問題として、地球は太陽の回りを公転しているが、ここでは万有引力と遠心力がつり合っている。この公転半径を、万有引力を無くして、クーロン力と遠心力から実現されていると考えたときに、どの位電荷を持たせればよいかを考えてみよう。

- 1.1-4 [身近な電磁気力]:

レポート問題なので、解答例は後ほど。

1.1-5 [電荷の中性]:問題 1.1-3 で議論したように、電荷の中性がずれていたときには大きなクーロン力の効果でいろんなスケールでの物質の崩壊が起きているであろう。実際にはそれが起きていないわけで、そこから中性度合を大雑把に評価できる。仮りに、水素原子の陽子と電子の電荷が e と $-e$ が中性から δ だけずれていたとする。つまり、それぞれの電荷が $(1 + \delta/2)e$ と $-(1 - \delta/2)e$ だとする。水素原子間に働く力は斥力になり、その大きさは $\frac{(\delta e)^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ となる。水素原子からなる星が存在するということは、たくさんの水素原子間に働く力は、クーロン力による斥力よりも万有引力による引力の方が大きいはずである。この条件から、

$$\frac{(\delta e)^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} < G \frac{m_e m_p}{r^2} \implies \delta < 2.1 \times 10^{-20}$$

となる。世の中は中性にできていることがわかる。

1.1-6 [クーロン力 1]:

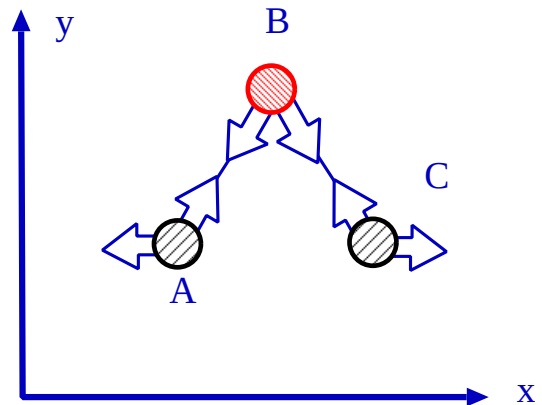
レポート問題なので、解答例は後ほど。

1.1-7 [クーロン力 2]:

電場をベクトルとして考える習慣になれることが、この問題の趣旨です。二番は力学の問題として、何が起きるか想像してみようということである。

1. ベクトルの合成

図のように座標軸をとり、3つの点電荷をそれぞれ A, B, C と呼ぶことにする。点電荷の間の距離は等しいのでそれぞれの間に働くクーロン力の大きさは等しく、 $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{a^2}$ となる。A が B から受ける力を $\mathbf{F}_{AB}$ と書くことにすると、クーロン力が作用・反作用型の力 ($\mathbf{F}_{AB} = -\mathbf{F}_{BA}$) であることを考えると、独立な3つの力ベクトルはそれぞれ、



$$\mathbf{F}_{AB} = \frac{F}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, \mathbf{F}_{BC} = \frac{F}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}, \mathbf{F}_{CA} = F \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

となり、ベクトルの合成を考えれば、それぞれの点電荷が受ける力は

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_A &= \mathbf{F}_{AB} + \mathbf{F}_{AC} = F \left\{ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \frac{F}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{F}_B &= \mathbf{F}_{BA} + \mathbf{F}_{BC} = F \left\{ -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} \right\} = F \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\mathbf{F}_C = \mathbf{F}_{CA} + \mathbf{F}_{CB} = F \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{F}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \right\}.$$

となることがわかる.

2. 力と運動

さて、力がわかればどちらの向きに動こうとするのかがわかる. そこで、点電荷の固定を外すとどうなるかを考えてみると、まずは点電荷が直線上の並ぶ方向に動こうとするであろう. 実際には運動方程式を解いてみたいところであるが、点電荷の質量をあからさまに与えていなかったり、問題の図の棒線が点電荷間の距離を固定しているように思えるので、固定されているかどうかで答え方が異なる.

まず、それぞれの運動量を $\mathbf{p}_A, \mathbf{p}_B, \mathbf{p}_C$ とすると、すぐわかることは、運動方程式

$$\frac{d}{dt}\mathbf{p}_A = \mathbf{F}_A, \quad \frac{d}{dt}\mathbf{p}_B = \mathbf{F}_B, \quad \frac{d}{dt}\mathbf{p}_C = \mathbf{F}_C,$$

から、

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B + \mathbf{p}_C) = \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_B + \mathbf{F}_C = \mathbf{0}$$

と重心の運動量は保存していることがわかる. これは AB 間や BC 間の距離が固定されているかどうかには依存しない. さて、適当に質量を与えて、運動方程式を解けばいいわけだが、これはちょっと難しいような問題である. 定性的には、以下のとおりであろう.

点電荷間の距離が固定されていない場合

最初は点電荷は直線上にならぶ方向に動き出すが、両端の点電荷から見ただ他の点電荷の相対位置は異符号の方が近いので、合力は重心に対して引力が働く. 結局は、重心の位置に点電荷が集結する¹.

点電荷間の距離が固定されている場合

上の設定よりも、自由度が格段に少なくなっているので、簡単である. この場合は、重心に集結することはなく、へん字一直線へん字の逆の振動を繰り返すことになる. この時に振動数はクーロン力の形で決まっているはずである.

1.1-8 [2つの異なる電荷のつくるクーロン電場]:

重ね合わせの原理をつかって、電荷の作る電場を求めてみようというのが、この問題の趣旨である.

正負の電荷の位置をそれぞれ $r_{\pm}(\pm a/2, 0, 0)$ とする. さて、まず解答に行く前に、ガウスの法則を使って何がわかるかを考えてよう. この二つの電荷を囲むような閉曲面を考えると、ガウスの法則の右辺(総電荷量)はゼロになる. よって、左辺

¹点電荷は“点”なので、衝突は起きないと考えている.

もゼロになるが、これは電場がゼロであることではない。その閉曲面を垂直に出て行く電場の大きさの**総量**がゼロなだけ、つまり出て行く量と入って来る量が同じである。残念ながら、これ以上のことはガウスの法則からはわからない。

1. y 軸上での観測 観測点の座標を $\mathbf{x}(0, y, 0)$ とする。この点と正負電荷間の距離はどちらも同じであるから、この位置での電場の大きさは同じである。また、電場の y 成分は正負で大きさは同じで方向が逆なので、重ね合わせるとゼロになる。 z 成分はないので、 x 成分だけ求めればよい。まず、それぞれの電荷が位置 $\mathbf{x}$ に作る電場の大きさ E は、 $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{y^2 + a^2/4}$ であるので、 x 成分は、

$$E_x = 2E \frac{a/2}{\sqrt{y^2 + a^2/4}} = \frac{qa}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(y^2 + a^2/4)^{3/2}} = \frac{qa}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{y^3} \left(1 + \frac{a^2}{4y^2}\right) \simeq \frac{qa}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{y^3}$$

となる。最後に $y \gg a$ の条件より、 $(a/y)^2$ は小さいとして無視した。よって、**方向に注意して**、答えは、

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \left(-\frac{qa}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{y^3}, 0, 0\right) \quad (2)$$

2. x 軸上での観測 観測点を $\mathbf{x}(x, 0, 0)$ とすると、この場合もやはり x 成分の電場しかない。その値は、

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{(x - a/2)^2} - \frac{q}{(x + a/2)^2} \right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x^2} \left[\left(1 - \frac{a}{2x}\right)^{-2} - \left(1 + \frac{a}{2x}\right)^{-2} \right] \simeq \frac{aq}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{x^3}.$$

前問と同様に距離の3乗に逆比例する形になった²。

3. 一般の場合 さて、一般的に距離の逆3乗則が成り立っているだろうか。それを確かめるのがここでの問題である。前問と同様にそれぞれの電荷が作る電場を重ね合わせればよいが、ここでは**ずる**をして、電位を経由して求めてみる³。それぞれの電荷が持っているクーロン電位を2つ重ね合わせることで位置 $\mathbf{x}(x, y, z)$ での電位 $\phi(\mathbf{x})$ を求める。

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{(x - (a/2))^2 + y^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x + (a/2))^2 + y^2 + z^2}} \right] \quad (3)$$

位置 $|\mathbf{x}|$ が電荷間の距離 a に比べて非常に大きい時にどのようなになるかを考える。まずは、 $a/x \ll 1$ として、 $a/x = 0$ の回りでの展開すると、

$$(x \pm (a/2))^2 = x^2 (1 \pm a/x + O((a/2x)^2)) \simeq x^2 \pm ax$$

であるから、クーロン電位のそれぞれの項は、

$$((x \pm a/2)^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} \simeq (x^2 + y^2 + z^2 \pm ax)^{-1/2} \simeq \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \mp \frac{ax/2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

²点電荷のクーロン電場は $\frac{1}{r^2}$ に比例し、一様に分布した直線電荷の作る電場は $\frac{1}{r}$ に、一様に分布した平面電荷の作る電場は $\frac{1}{r^0}$ に比例していた。そして、今回は、2つの同じ電荷量の点電荷の作る電場は $\frac{1}{r^3}$ になることがわかった。

³電位についてはもう少し後で詳しく議論する。

となり、式(3)は、

$$\begin{aligned}\phi(\boldsymbol{x}) &\simeq \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{ax}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ &\downarrow \text{ここで, } \boldsymbol{p} = (aq, 0, 0), \boldsymbol{R} = (x, y, z) \text{ を使えば,} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{R}}{|\boldsymbol{R}|^3}\end{aligned}\tag{4}$$

となる。これは電気双極子と呼ばれている系であり、 $\boldsymbol{p}$ を電気双極子モーメントと呼ぶ。電位 ϕ と電場 $\boldsymbol{E}$ の関係は、 $\boldsymbol{E} = -\nabla\phi$ であるから、電位から電場を求めてみる。 $|\boldsymbol{p}| = p = aq$ として、

$$\begin{aligned}E_x &= -\frac{\partial}{\partial x}\phi = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\boldsymbol{R}|^3} - \frac{3x^2}{|\boldsymbol{R}|^5} \right), \\ E_y &= -\frac{\partial}{\partial y}\phi = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3yx}{|\boldsymbol{R}|^5}, \\ E_z &= -\frac{\partial}{\partial z}\phi = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3xz}{|\boldsymbol{R}|^5},\end{aligned}$$

となる。ところで、こんな双極子とは何なのよ。というのは、自然な疑問である。正負の電荷が対で置かれている状況は、導体でない物質に電場をかけたときのミクロな世界で起きていることのモデル化になっている。つまり、導体ならば、自由電子が電場を中和するように再配列できるが、誘電体では電子は物質中を自由に動きまわらず、ミクロな単位(原子)内で電場の方向に移動すると考えるわけだ。誘電体では、この電気双極子が沢山つまっている状況を一つのモデルとして考えることができる。また、水分子などの分子構造が対称でない分子も双極子モーメントをもっている。

- **問い：**一様な電場の中に置かれた双極子モーメントはどちらの方向を向だろうか？
- **問い：**双極子モーメントの近くにある別の双極子モーメントはどちらの方向を向だろうか？

これが、電荷を持たず、電気の流れない紙が下敷に引きつけられる理由に近付けるでしょう(か?)。

1.1-9 [球対称な電荷の作る電場]:

この問題の趣旨は、クーロンの法則と重ね合わせの原理から求まる電場の例を計算してみようということである。もちろん、ガウスの法則を用いてもよい。一度積分をしてみると、ガウスの法則に対する感動が5割増し(私的比較)になる。同じ問題を異なる方法で解いてみることは大切なことである。立体角を用いて求めることはできるが、ここではクーロンの法則から積分する方法を示しておく。

1. まずはそのような状況を作ってみようということだが、これは導体球⁴を用意すれば簡単にできる。ここではピンポン球にアルミをまいてみる。周囲と絶縁したピンポン球に、こすった下敷をくっつけることで、電荷を渡せばよい。ひとたび電荷が帯びると、導体中の電荷は球面に平行な電場が生じないように、電荷の再配置を行う。今は対称性の高い球状なので、電荷は球面上に一様に分布する。

なぜ下敷の電荷がピンポン球の方に移動するかは後からまた考えてみることにしよう。

2. 3. 半径 a の球面上に一様な面電荷密度 σ で分布している球殻の作る電場を考える。観測位置を z 軸にとっても一般性を失わない。 z 軸に垂直な面と球殻が交わっている円環は観測点との距離が一定の円になっている。右図のように z 軸となす角 θ の円環上にある総電荷は、

$$\begin{aligned}\text{円環上の総電荷} &= \text{面密度}\sigma \times \text{面積} \\ &= \sigma(2\pi a \sin \theta)(a d\theta)\end{aligned}$$

となる。微小な円環が観測点に作る電場を考える。観測点から円環を見ると、ある円環上の部分に z 軸に対称な部分が必ず存在することから、 z 軸方向以外は対称からキャンセルされてゼロになるので、 z 軸方向だけを考えればよい。

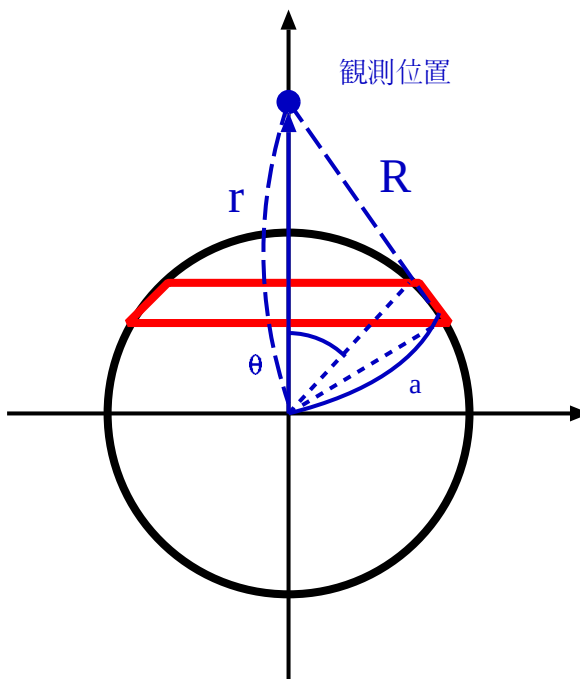


図 1: 一様に帯電した半径 a の球殻

z 軸との角度が θ となる微小円環の作る電場の z 軸成分を $dE_r(\theta)$ は、

$$dE_r(\theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi a^2 \sigma \sin \theta d\theta}{R^2} \frac{r - a \cos \theta}{R}$$

となる。ここで、 R は円環と観測点との距離で、

$$R^2 = (r - a \cos \theta)^2 + a^2 \sin^2 \theta = r^2 - 2a \cos \theta r + a^2$$

そこで全ての円環について積分、すなわち θ を 0 から π まで重ね合わせればよい。

$$E_r(r) = \int_0^\pi dE_r(\theta) = \frac{2\pi\sigma a^2}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi d\theta \sin \theta \frac{r - a \cos \theta}{(r^2 - 2a \cos \theta r + a^2)^{3/2}} \quad (5)$$

⁴後で説明するが、ここではおおらかに電気が流れる物体としておこう。

$$\begin{aligned}
& \downarrow \text{ (変数変換: } 2RdR = 2ar \sin \theta d\theta \text{)} \\
& \downarrow \left(a \cos \theta = \frac{1}{2r} (r^2 + a^2 - R^2) \right) \\
& = \frac{\sigma a^2}{2\epsilon_0} \int_{|r-a|}^{r+a} \frac{RdR}{ar} \frac{r - \frac{1}{2r} (r^2 + a^2 - R^2)}{R^3} = \frac{\sigma a}{2\epsilon_0} \int_{|r-a|}^{r+a} dR \frac{1}{R^2} \left(1 - \frac{r^2 + a^2 - R^2}{2r^2} \right) \\
& \downarrow \left(\frac{1}{R^2} \left(1 - \frac{r^2 + a^2 - R^2}{2r^2} \right) = \frac{r^2 - a^2 + R^2}{2r^2 R^2} = \frac{1}{2r^2} \left(1 + \frac{r^2 - a^2}{R^2} \right) \right) \\
& = \frac{\sigma a}{4\epsilon_0 r^2} \int_{|r-a|}^{r+a} dR \left(1 + \frac{r^2 - a^2}{R^2} \right) = \frac{\sigma a}{4\epsilon_0 r^2} \left(R - \frac{r^2 - a^2}{R} \right) \Big|_{|r-a|}^{r+a} \\
& = \frac{\sigma a}{4\epsilon_0 r^2} \left[r + a - \frac{r^2 - a^2}{r + a} - |r - a| + \frac{r^2 - a^2}{|r - a|} \right] \\
& \text{下線部} = \begin{cases} 2a - (a - r) - (r + a) = 0 & \text{for } r > a \\ 2a - (r - a) + (r + a) = 4a & \text{for } r < a \end{cases} \\
& = \frac{\sigma a^2}{\epsilon r^2} \theta(r - a)
\end{aligned} \tag{6}$$

ここで、 $\theta(x)$ はステップ関数で $x > 0$ の時に 1, $x < 0$ の時に 0 をとる.

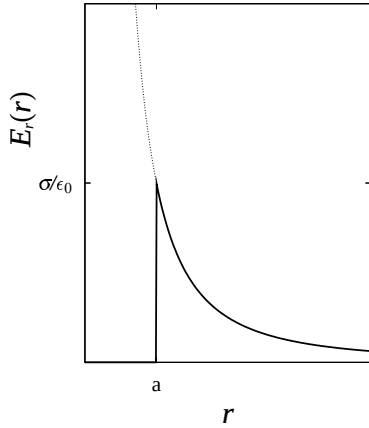


図 2: 電場の動径成分を原点からの距離の関数としてグラフにする

- 球内はどこでも電場が 0 になっている.
- 球の外では、球殻上の総電荷量 $4\pi a^2 \sigma$ が原点に集まっている場合と同じ.

この結果はガウスの法則から、求めることもできる. 任意の閉曲面として、原点を中心とする球を考えて、ガウスの法則から、電場は 動径成分 E_r しか無く、角度に依存しない とすれば、

$$\int_{\text{球面}} dS E_r = 4\pi r^2 E_r \frac{\text{球内の電荷}}{\epsilon} = 0$$

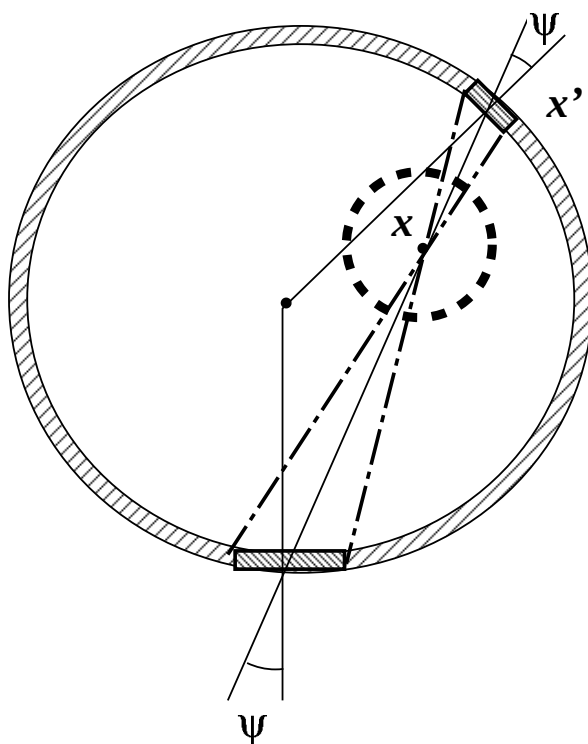
から、すぐに $E_r = 0$ が求まる.

しかし、下線部の仮定は実際に示せるだろうか? 不思議な感じがして、ちょっと自明ではないと思うが、立体角の考え方からみればとても自然な感じがする.

おまけ 立体角を用いて、球殻内部に電場がないことを再考する. 球殻内部の任意の位置ベクトル $\mathbf{x}$ での電場は、クーロンの法則より、

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int dS' \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int d\Omega \frac{1}{\cos \psi} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

となる⁵。



ここで立体角の式, $d\Omega = \frac{\cos \psi}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} dS'$ を用いて, 球殻の表面の積分を立体角の積分に変換した. ここで ψ は $\mathbf{x}'$ での面の法線ベクトルと $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$ のなす角である. この積分は, 立体角に関して $\frac{1}{\cos \psi} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$ を積分するが, $\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$ は単位ベクトルであり大きさは1であることに注意すると, 観測点からみて全ての方向に関して $\frac{1}{\cos \psi}$ を積分すればよいことがわかる. さらに, ある方向 $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$ に対して, 観測点 $\mathbf{x}$ からみてちょうど反対の方向 $-\mathbf{x} + \mathbf{x}'$ が必ず存在する. 球の性質より, $\cos \psi(\mathbf{x}) = \cos \psi(\mathbf{x}')$ であることがわかるので, 積分はいつでもゼロであることがわかる. ここでの議論は, ベクトルの各成分がゼロであることを示している.

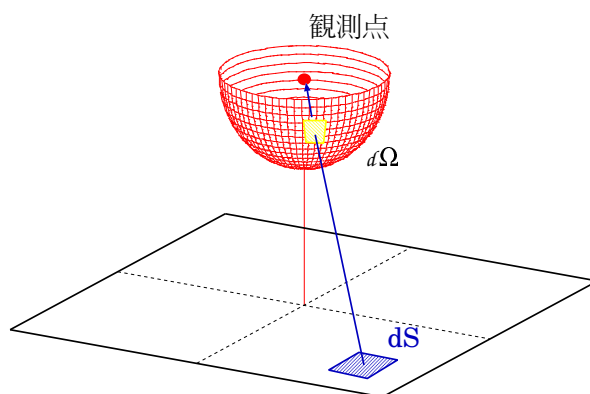
1.1-10 [一様平面電荷の作る電場]: この問題もクーロンの法則を積分することで電場を求めることはできるが, ここでは立体角の考え方をを使うことで, その概念を良く理解することにする. 立体角とは単位球上での見込む角度のことである. この考え方はたびたび便利ことがある.

まず, 対称性から電場の平面に水平成分はキャンセルするので, 垂直成分 E_z のみを考える。

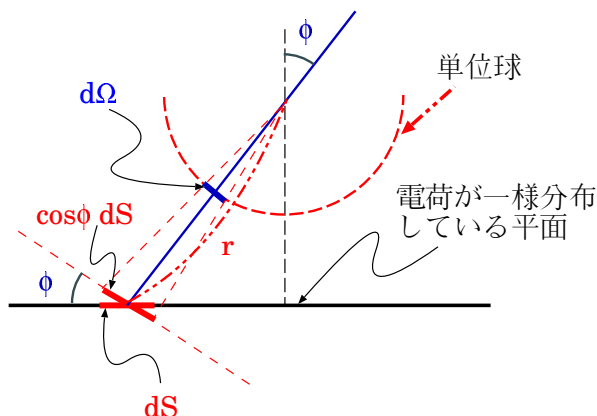
観測点から距離 r にある平面上の面積要素 dS が作る電場 dE_z は、

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma \cos \phi}{r^2} dS \quad (7)$$

ここで, σ は電荷の面密度で, ϕ は観測点からの面積要素の位置ベクトル $\mathbf{r}$ と平面となす角である。面積要素 dS からの寄与を観測点から見たときに, 平面全体の積分を単位球上の積分に置き換えてみる (右の図のように)。



⁵ガウスの法則の証明と状況が逆転している. ここでは位置 $\mathbf{x}'$ の電荷が作る電場を位置 $\mathbf{x}$ で観測している.



面積要素が観測点に対して張る立体角 $d\Omega$ は、観測点を中心とする単位球上の面積要素 dS を見込む表面積である。また、面積要素 dS を通る観測点を中心とする球上への dS の射影 dS' は、 $dS' = \cos \phi dS$ と表される。面積要素 dS と立体角の関係は、

$$1 : r^2 = d\Omega : \cos \phi dS$$

であることから、

$$dS = \frac{r^2}{\cos \phi} d\Omega \quad (8)$$

となる。

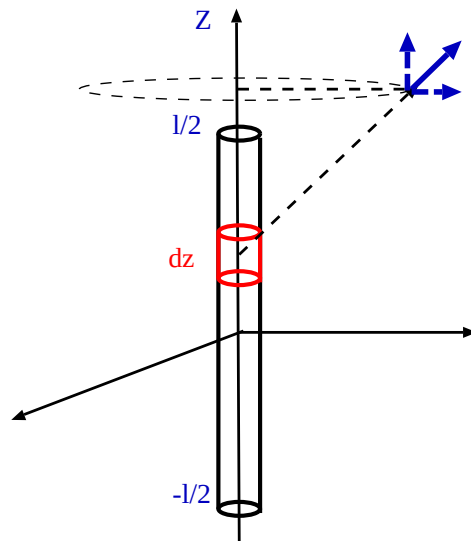
平面全体の寄与は、

$$E_z = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{平面全体}} \frac{\cos \phi}{r^2} dS = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{単位半球}} d\Omega = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} 2\pi = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (9)$$

となる。

1.1-11 [一様に帯電した直線電荷の作る電場]:

右図のように、長さ l の直線上に一様な線密度 λ で分布している電荷の作る電場を求め。ここでは、円柱座標系を用いるとよい。線要素 dz の持つ電荷 λdz が位置 (ρ, ϕ, z) に作るクーロン場を $-l/2$ から $l/2$ まで重ね合わせればよい。電場の動径方向、角度方向、鉛直方向の成分をそれぞれ E_ρ, E_ϕ, E_z とする。クーロン場の性質より、 $E_\phi = 0$ となるのがわかるので、残りの 2 つをそれぞれ求めることにする。



動径成分： E_ρ

$$\begin{aligned} E_\rho &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-l/2}^{l/2} dz' \frac{\lambda(\rho - 0)}{(\rho^2 + (z - z')^2)^{3/2}} \\ &\downarrow (z - z' = \xi \text{ と置く}) \\ &= \frac{\lambda\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_{z-l/2}^{z+l/2} d\xi \frac{1}{(\rho^2 + \xi^2)^{3/2}} = \frac{\lambda\rho}{4\pi\epsilon_0} \frac{\xi}{\rho^2(\rho^2 + \xi^2)^{1/2}} \Big|_{z-l/2}^{z+l/2} \end{aligned}$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\rho} \left[\frac{z + l/2}{\sqrt{\rho^2 + (z + l/2)^2}} - \frac{z - l/2}{\sqrt{\rho^2 + (z - l/2)^2}} \right] \quad (10)$$

この積分はチェックしておこう.

鉛直成分： E_z

$$\begin{aligned} E_z &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-l/2}^{l/2} dz' \lambda \frac{z - z'}{(\rho^2 + (z - z')^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{z-l/2}^{z+l/2} d\xi \frac{\xi}{(\rho^2 + \xi^2)^{3/2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{(\rho^2 + \xi^2)^{1/2}} \right) \Big|_{z-l/2}^{z+l/2} \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z + l/2)^2}} + \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z - l/2)^2}} \right] \end{aligned} \quad (11)$$

- (a) l が小さい極限 ($l \rightarrow 0$) の時に、電荷分布は点電荷のようにみえるはずである. そうなることを確かめよう. もっとも、式 (10), (11) 中の l を 0 と置いてはどちらも 0 になってしまう. そこで、全電荷量 $l\lambda = Q$ を一定にして、 $l \rightarrow 0$ の極限をとってみる. まずは、 E_z について考えるが、 l が十分小さいときにテーラー展開を使って、

$$\rho^2 + (z \pm l/2)^2 = \rho^2 + z^2 \left(1 \pm \frac{l}{2z} \right) \simeq \rho^2 + z^2 \left(1 \pm \frac{l}{z} \right) = \rho^2 + z^2 \pm lz$$

であることから、

$$(\rho^2 + (z \pm l/2)^2)^{-1/2} \simeq (\rho^2 + z^2 \pm lz)^{-1/2} \simeq (\rho^2 + z^2)^{-1/2} \left(1 \mp \frac{lz}{2(\rho^2 + z^2)} \right)$$

である. これを用いて、 $l \rightarrow 0$ で残る部分は

$$\begin{aligned} E_z &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{l} \left[\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z - l/2)^2}} - \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z + l/2)^2}} \right] \\ &\simeq \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{l} \left[\frac{lz}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \right] = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{z}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \right] \end{aligned}$$

となる. ρ は z 軸からの距離であり、 $\rho^2 = x^2 + y^2$ であることに注意すると、上の式はクーロンの法則に他ならないことがわかる. 横成分である E_ρ についても同様に示すことができる.

- (b) 線が無限に長い場合は、式 (10),(11) より、 $l \rightarrow \infty$ として

$$E_z = 0 \quad (12)$$

$$E_\rho = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\rho} \quad (13)$$

が示される.

1.1-12 **[クーロン場の発散と回転]**: クーロン電場の場合の性質をチェックする過程で、ベクトル演算の練習をしようというのが、この問題の趣旨。式どおりできれば、示すことができる。

発散

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{\partial}{\partial x} E_x + \frac{\partial}{\partial y} E_y + \frac{\partial}{\partial z} E_z \\
 &\downarrow \frac{\partial}{\partial x} E_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \quad (\Leftarrow r^2 = x^2 + y^2 + z^2) \\
 &\downarrow = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{x(-3/2)2x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r^2 - 3x^2}{r^5} \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{r^2 - 3x^2}{r^5} + \frac{r^2 - 3y^2}{r^5} + \frac{r^2 - 3z^2}{r^5} \right) \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{3r^2 - 3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} = 0
 \end{aligned}$$

原点 $r = 0$ 以外ではゼロになっていることが示された⁶。

回転: x 成分について書き下してみる。

$$\begin{aligned}
 (\nabla \times \mathbf{E})_x &= \frac{\partial}{\partial y} E_z - \frac{\partial}{\partial z} E_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right) \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{-3yz}{r^5} - \frac{-3yz}{r^5} \right) = 0
 \end{aligned}$$

y, z 成分も同様である。ここでも、原点では発散しているが、それ以外ではゼロになっていることが示された。この物理的な意味は後で議論する。

1.1-13 **[ベクトルの性質]**: これは電場に限定されずに一般的なベクトルの性質であるが、各成分をあからさまに代入して計算すれば示すことが出来る。

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \\
 &= \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial y} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

ほとんどベクトル積の定義が分かれば出来るはず。この関係式は後の問題でも使われる。

⁶ガウスの法則との関係はどうなっているのだろうか？

1.2 電場とガウスの法則

1.2-1 [ガウスの法則の例題]:1.1-9, 1.1-10, 1.1-11 をガウスの法則を使って電場を求めてみる。

球殻電荷のつくる電場

電荷が球対称なので、電場も球対称である。つまり、電場の大きさは中心からの距離にのみ依存し、方向は動径方向である。その大きさを E_r とする。ガウスの閉曲面を半径 r の同心球とする。その球面上で電場の大きさは一定で、 E_r であり、その方向は球面に垂直である。つまり、このガウスの閉曲面で選んだ球面の法線ベクトルと平行である。 r と電荷球の半径 a の大小関係でガウスの法則の右边が変わることに注意して、ガウスの法則を使うと、

$$\int_{\text{球面}} dS \mathbf{n} \cdot \mathbf{E} = E_r \int dS = E_r 4\pi r^2 = \int_{\text{球}} dV \frac{\rho}{\epsilon_0} = \begin{cases} \frac{4\pi a^2 \sigma}{\epsilon_0} & \text{for } r > a \\ 0 & \text{for } r < a \end{cases}$$

であるから、求める電場 E_r は $E_r = \frac{\sigma a^2}{\epsilon_0 r^2} \theta(r-a)$ である。これは、1.1-9 の式 (6) と一致している。

平面電荷のつくる電場

これはレポート問題なのでヒントをあげておくことにする。

- (a) 電場の方向はどっち向き？
- (b) 電場の大きさは何に依存する？
- (c) ガウスの閉曲面は電場の方向と平行か垂直になるように選ぶのがよい。

直線電荷のつくる電場

簡単のために、電荷は λ を線密度とする無限に長い直線電荷とする。直線電荷を z 軸にとると、 z 軸を中心に回転対称性がある。つまり、どこに x 軸, y 軸をとっても同じように見える。さらに、 z 軸のどの値の平面もやはり同じに見える。このことから、電場の大きさ E_r は z 軸から距離だけの関数で、その方向は動径方向であることがわかる。

ガウスの法則で使う閉曲面は z 軸を中心とした半径 r の円柱をとることにする。 z 軸方向の高さは l とする。円柱の上下の蓋の部分の法線ベクトルは z 軸に平行であるが、電場はそれと垂直な動径方向であるので ($\mathbf{n}_{\text{上下の蓋}} \cdot \mathbf{E} = 0$)、ガウスの法則への寄与はない。一方で、側面ではいつでも面の法線ベクトルとは平行である ($\mathbf{n}_{\text{側面}} \cdot \mathbf{E} = E_r$)。これらに注意して、ガウスの法則を使うと、

$$\int_{\text{円柱の面}} dS \mathbf{n} \cdot \mathbf{E} = \int_{\text{側面}} E_r dS = E_r 2\pi r l = \int_{\text{円柱内}} dV \frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{\lambda l}{\epsilon_0}$$

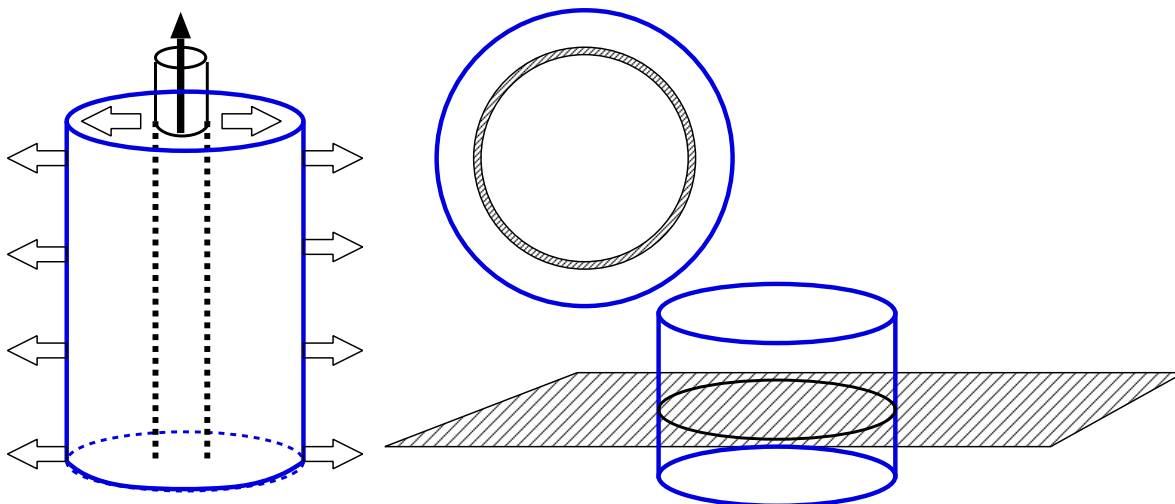


図 3: ガウスの法則で使う閉曲面の例

であるから、求める電場 E_r は $E_r = \frac{\lambda a^2}{2\pi\epsilon_0 r}$ である。もちろんこれは 1.1-11 の式 (13) と一致している。

1.2-2 [平板電荷の電場について]: レポート問題なので、解答例は後ほど。

1.2-3 [二枚の平板電荷]: レポート問題なので、解答例は後ほど。

1.2-4 [一様に帯電している円柱の作る電場]: この問題ではガウスの法則の使い方に対する注意を与えるのが主な趣旨である。(1) どんな閉曲面を選んだのか、(2) それぞれの面での積分の寄与はどうなっているか、を注意して考えたい。

(a) 簡単のために円柱は無限に延びていることにする。円柱の対称性のために、電場の動径方向⁷以外の成分は全てキャンセルしている。電場の動径成分は中心軸からの距離だけの関数になっているので、それを $E_r(x)$ とする。円柱に平行な半径 r 、高さ l の筒を閉曲面として選ぶと、その側面での E_r は全て同じ値を持っている。また、筒の上面と下面に垂直な電場は存在していないので、そこからの寄与はない。ここでガウスの法則より、

$$\int dS \mathbf{n} \cdot \mathbf{E} = 2\pi r l E_r = \int dV \frac{\rho}{\epsilon_0} = \begin{cases} \frac{l\pi r^2 \rho}{\epsilon_0} & \text{for } r \leq a \\ \frac{l\pi a^2 \rho}{\epsilon_0} & \text{for } r \geq a \end{cases}$$

となり、まとめると、

$$E_r = \begin{cases} \frac{r\rho}{2\epsilon_0} & \text{for } r \leq a, \\ \frac{a^2\rho}{2r\epsilon_0} & \text{for } r \geq a \end{cases} \quad (14)$$

⁷中心から放射状に向く方向

円柱の外から見た答えは、全ての電荷を中心線上に集中し、線密度 $\lambda = \pi a^2 \rho$ の作る電場

$$E_r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

と同じと見ることも出来る。

(b) 空洞を作るということは反対電荷の円柱を埋め込むと考えることができる。そこで、反対符号の電荷密度を持った半径 b を円柱を前問の円柱に埋め込む状況を考える。前問の答えから、一様な電荷密度 $-\rho$ をもった円柱の作る電場 E'_r は、

$$E'_r = \begin{cases} -\frac{r\rho}{2\epsilon_0} & \text{for } r \leq b \\ -\frac{b^2\rho}{2r\epsilon_0} & \text{for } r \geq b \end{cases} \quad (15)$$

となる。

重ね合わせの原理より、式 (14), (15) を足せばよく、

$$E_r^{\text{tot}} = \begin{cases} 0 & \text{for } r \leq b \\ -\frac{b^2\rho}{2r\epsilon_0} + \frac{r\rho}{2\epsilon_0} & \text{for } b \leq r \leq a \\ -\frac{b^2\rho}{2r\epsilon_0} + \frac{a^2\rho}{2r\epsilon_0} = \frac{\rho}{2r\epsilon_0}(a^2 - b^2) & \text{for } r \geq a \end{cases} \quad (16)$$

が得られる。重ね合わせの原理は、存在する電荷にだけでなく、このように架空の電荷についても成り立っているが、電場の大きさについてではなく、ベクトルの重ね合わせであることに注意が必要である。

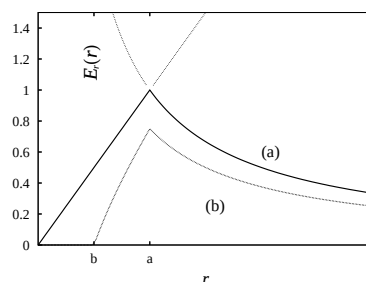


図 4: 電場の動径成分 E_r の r 依存性. 縦軸の単位は, $a\rho/(2\epsilon_0)$. (a) と (b) の結果をそれぞれ示してある.

もちろん、最初からガウスの法則を用いることで、(a) と同様に得られるが、このように重ね合わせの原理を使うと次の問題が考えやすい。

(c). ここでは円柱が同心円柱でなくなった場合に、くりぬいた部分がどのようなかを考察してみる。以下では典型的な (誤) 解答例を示す。

「円柱の外から見ると、その内部にある総電荷量は (b) と同じなので、電場も (b) と同じである。」

ガウスの法則の右辺は穴がずれていても、外から見ている限りはいつでも同じである。しかしながら、この解答は左辺について誤解している。左辺は、 $\int d\mathbf{S} \cdot \mathbf{E}$ であるが、もはや**対称性がない**ので、例えば筒型の閉曲面を選んだときに、その面の法線ベクトル $\mathbf{n}$ と電場 $\mathbf{E}$ は平行ではなく、また筒の場所にも依存するので、この積分を評価することは難しい。

「くりぬいた部分の中に閉曲面を考えると、その中には電荷は無いので、電場がゼロであることがわかる。」

ここではガウスの法則の右辺は正しく評価されていて、ゼロであるが、左辺は電場の沸き出し総量なので、それがゼロであることしかわからない。出入りがゼロであるだけであって、出て行く量あるいは入ってくる量がゼロであることはわからない。

「対称性がずれてしまったので、ガウスの法則は使えない。」

これはある意味で正しい。ただ、重ね合わせの原理を使うことを考えると、円柱とくりぬくべき円柱のそれぞれは綺麗な対称性を持っている。それぞれの作る電場をガウスの法則で求めておいて、重ね合わせることはできる。

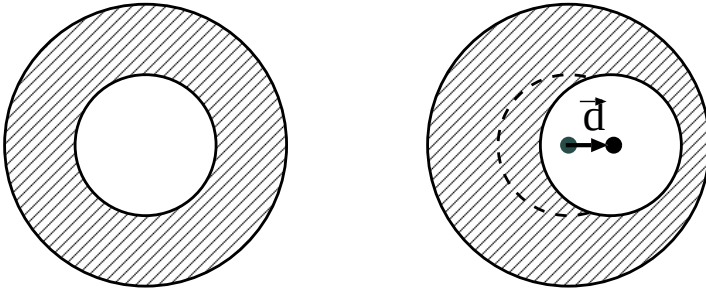


図 5: 円柱を上から見た図. 同心円になっている場合 (左) とベクトル $\mathbf{d}$ だけずれている場合 (右)

さて、重ね合わせの原理を用いて、具体的に電場を求めてみることにする。原点を半径 a の円柱の中心にとり、(a) の結果をベクトルで表せば、

$$\mathbf{E}_a(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{|\mathbf{x}|\rho}{2\epsilon_0} \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \mathbf{x} & \text{for } |\mathbf{x}| \leq a \\ \frac{a^2\rho}{2|\mathbf{x}|\epsilon_0} \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} = \frac{a^2\rho}{2\epsilon_0} \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^2} & \text{for } |\mathbf{x}| \geq a \end{cases} \quad (17)$$

である。くりぬいた円柱の中心のずれベクトルを $\mathbf{d}$ とすると、同様に式 (15) は、

$$\mathbf{E}_b(\mathbf{x}) = \begin{cases} -\frac{\rho}{2\epsilon_0}(\mathbf{x} - \mathbf{d}) & \text{for } |\mathbf{x} - \mathbf{d}| \leq b \\ -\frac{b^2\rho}{2\epsilon_0} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{d}}{|\mathbf{x} - \mathbf{d}|^2} & \text{for } |\mathbf{x} - \mathbf{d}| \geq b \end{cases} \quad (18)$$

となる。これらを重ね合わせればよい。

$$\mathbf{E}_{\text{tot}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{\rho}{2\epsilon_0} \mathbf{x} - \frac{\rho}{2\epsilon_0}(\mathbf{x} - \mathbf{d}) = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \mathbf{d} & \text{for 円柱の内部でかつ空洞の中} \\ \frac{\rho}{2\epsilon_0} \mathbf{x} - \frac{b^2\rho}{2\epsilon_0} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{d}}{|\mathbf{x} - \mathbf{d}|^2} & \text{for 円柱の内部でかつ空洞の外} \\ \frac{a^2\rho}{2\epsilon_0} \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^2} - \frac{b^2\rho}{2\epsilon_0} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{d}}{|\mathbf{x} - \mathbf{d}|^2} & \text{for 円柱の外部でかつ空洞の外.} \end{cases} \quad (19)$$

もはや、空洞の内部で電場がゼロとはなり得ないことはわかったであろう。しかしながら少し驚いたのは、空洞内の電場がずれベクトル $\mathbf{d}$ に比例して、しかも一

定であることである。空洞内で一定なベクトルであれば、空洞内に筒状の閉曲面を考えると、その面についてのわきだし量はゼロになることは確かに示すことができる。

1.2-5 [ガウスの法則だけから電場のルールが全て決まらないこと]:

この問題は、ガウスの法則とクーロンの法則が完全に一致しているわけではないことを議論している。まずは、数学の問題から示そう。ガウスの法則を満たす電場 $\mathbf{E}$ に適当なベクトル場 $\mathbf{A}$ の回転 $\nabla \times \mathbf{A}$ を加えたベクトル場 $\mathbf{E}'$ の発散は、

$$\nabla \cdot \mathbf{E}' = \nabla \cdot (\mathbf{E} + \nabla \times \mathbf{A}) = \frac{\rho(x)}{\epsilon_0} + \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A})$$

となる。ここで最後の式の第二項は問題 2 よりゼロになることがわかっているから、このベクトル場 $\mathbf{E}'$ もガウスの法則を満たしていることがわかる。すなわち、ガウスの法則を満たすベクトル場を一つ見つけてくると、それに好きなベクトル場の回転を加えることで、いくらでもガウスの法則を満たす場を作ることができることになり、一意的に決定することはできない。偽物の電場ベクトルをいくらでもつくることができてしまうことになる。このことから、ガウスの法則がクーロンの法則の全ての性質をもっているわけでないことがわかる。これはどういうことなのか。

少し考えてみると、クーロンの法則は重ね合わせの原理と合わせることで、電荷がある場合に電場を与えてくれる法則である。電場はベクトルであるから、3つの成分を持っている。一方で、ガウスの法則はスカラーの恒等式になっている。結局は、3つの未知の変数に対して、1つの方程式(ガウスの法則)しかわかっていないために、全ては決定できないということになっているわけである。

ここで、すぐに幾つかの素朴な疑問が浮かぶであろう。例えば、すぐ後に見るように、ガウスの法則を用いて電場を求めることができる例がある。あるいは、講義で示した例題でも、ガウスの法則だけから、電場を計算してみせた。これはなぜだろうか。

では、残された条件はどこかと言えば、クーロンの法則で決まる電場にその性質が残されているわけだが、その条件式は $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$ である。この関係式は実際に 1.1-12 の式から確かめることが出来る。この続きは次の問題で考えることにする。

1.2-6 [ガウスの法則と渦無しの法則から...]:

講義では大急ぎでしゃべったところだが、練習問題の解答例としてまとめておく。問題は、

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0 \quad (20)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (21)$$

これらからクーロンの法則が出てくるか、あるいは、 $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$ が決まるか、というのが問いである。少し難しい問題なので、以下では簡便版の答えを示すことにする。まず、知りたい変数が3つで、決めるべき条件式が4つあるようにみえる。そうだとすれば、条件が多すぎるような気がするが、2つの式を合わせると $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = 0$ はどのような $\mathbf{E}$ に対しても成り立つために、実は4つの条件は独立ではなく、この恒等式の方だけ条件は一つ減っていることになる。結果として、ちょうど3つの自由度が残っている。

さて、式 (21) から、ポテンシャル ϕ を定義できることは講義で示した。

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\nabla\phi(\mathbf{x}) \quad (22)$$

そして、このポテンシャルを式 (21) に代入することで、ポテンシャルの満たすべき方程式 (ラプラス方程式) が

$$\nabla \cdot (-\nabla\phi(\mathbf{x})) = -\nabla^2\phi(\mathbf{x}) = \frac{\rho(\mathbf{x})}{\epsilon_0} \quad (23)$$

出てくる。この方程式の特解が、クーロン電位になると話して、それを確かめることを宿題にしておいた⁸。ここではそれを具体的に示してみる。電荷が連続に分布している場合のクーロン電位は、

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (24)$$

である。これが式 (23) の解になっていることを確かめる。

$$\begin{aligned} -\nabla^2\phi(\mathbf{x}) &= -\nabla^2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \rho(\mathbf{x}') \nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \\ &\downarrow \left(\text{ここで, } \nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = -\nabla \cdot \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} = \nabla' \cdot \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \right) \\ &\downarrow (\text{ここで, } \nabla' \text{ は } \mathbf{x}' \text{ での偏微分。}) \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \rho(\mathbf{x}') \nabla' \cdot \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \\ &\downarrow \text{ また, 下線部は練習問題 1.1-12 で示したように, } \mathbf{x}' \neq \mathbf{x} \text{ では } 0 \text{ である。} \\ &\downarrow \text{ 積分に寄与があるのは, } \mathbf{x}' = \mathbf{x} \text{ だけなので, その } \mathbf{x} \text{ 近傍の半径 } a \text{ の積分を考える。} \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \rho(\mathbf{x}) \int_{\mathbf{x}' \text{ 近傍の微小球}} d^3x' \nabla' \cdot \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \\ &\downarrow \text{ ガウスの定理と立体角の計算をすると,} \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \rho(\mathbf{x}) \int_{\mathbf{x}' \text{ 近傍の微小球面}} dS' \mathbf{n} \cdot \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \rho(\mathbf{x}) (-4\pi a^2) \frac{a}{a^3} = \frac{\rho(\mathbf{x})}{\epsilon_0} \end{aligned} \quad (25)$$

⁸これを解くには技術がいるが、確かめることは比較的容易である。

このポテンシャルから電場を求めると、クーロンの法則になる。後は、これが無限遠で0になる条件を加えて、唯一の解であることを示せばよいですね。それはみなさんやってみましょう。

1.2-7 [ベクトル場の演算]:ベクトル場の微分の練習問題です。

(1) ベクトル場 $\mathbf{A}$ の発散 ($\text{div } \mathbf{A}$)

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 6xy - 2xz + 3xz^2.$$

(2) ベクトル場 $\mathbf{A}$ の回転 ($\text{rot } \mathbf{A}$)

$$\begin{aligned} (\nabla \times \mathbf{A})_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = 0 + 2xy \\ (\nabla \times \mathbf{A})_y &= \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = 0 - z^3 \\ (\nabla \times \mathbf{A})_z &= \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = -2yz - 2 \cdot 3x^2 \end{aligned}$$

$$\text{これらをまとめると, } \nabla \times \mathbf{A} = (2xy, -z^3, -2yz - 6x^2).$$

(3) ベクトル場 $\mathbf{A}$ の発散の勾配: $\text{grad}(\text{div } \mathbf{A})$

$$\nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) = \nabla (6xy - 2xz + 3xz^2) = (6y - 2z + 3z^2, 6x, -2x + 6xz).$$

1.2-8 [ガウスの定理の練習]:

数学の定理であるガウスの定理

$$\int dV \nabla \cdot \mathbf{A} = \int dS \mathbf{n} \cdot \mathbf{A}$$

を実感するための練習問題である。本来は両辺のうちの計算しやすいのが実際の使い方であるが、ここでは両辺それぞれを計算して、等式が成り立つことを確かめてみる。

まずは左辺から計算する。 $\nabla \cdot \mathbf{A} = x + y + z$ であるから、

$$\int dV \nabla \cdot \mathbf{A} = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz (x + y + z) = 3 \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz x = \frac{3}{2}$$

となる。ここで、2式から3式への移行は x, y, z の入れ換え対称性から、 $(x + y + z)$ のどの項も同じ値をとることを使った。

一方、右辺は、全部で6つの面での積分がある。それぞれに分けて計算する。

$$\int dS \mathbf{n} \cdot \mathbf{A} = \int_{x=1 \text{ の面}} dydz (1, 0, 0) \cdot \mathbf{A} + \int_{x=0 \text{ の面}} dydz (-1, 0, 0) \cdot \mathbf{A}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{y=1 \text{ の面}} dx dz (0, 1, 0) \cdot \mathbf{A} + \int_{y=0 \text{ の面}} dx dz (0, -1, 0) \cdot \mathbf{A} \\
& + \int_{z=1 \text{ の面}} dx dy (0, 0, 1) \cdot \mathbf{A} + \int_{z=0 \text{ の面}} dx dy (0, 0, -1) \cdot \mathbf{A} \\
& = \int_{x=1 \text{ の面}} dy dz xy + \int_{x=0 \text{ の面}} dy dz (-xy) + \int_{y=1 \text{ の面}} dx dz yz \\
& + \int_{y=0 \text{ の面}} dx dz (-yz) + \int_{z=1 \text{ の面}} dx dy zx + \int_{z=0 \text{ の面}} dx dy (-zx) \\
& = 3 \int_{x=1 \text{ の面}} dy dz xy = 3 \int_0^1 dy \int_0^1 dz y = \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

最後の行では対称性と $x = 1$ の面であることから $x = 1$ を代入した．確かに右辺 = 左辺であることが確かめられた．

1.2-9 [ストークスの定理]:

このストークスの定理はガウスの定理と並んで、ベクトル場を解析する上でよく使われる定理である．ベクトル場 $\mathbf{A}$ の回転 (rot) について一般に成り立つストークス定理は、

$$\int_S \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) dS = \int_C d\mathbf{x} \cdot \mathbf{A} \quad (26)$$

である．

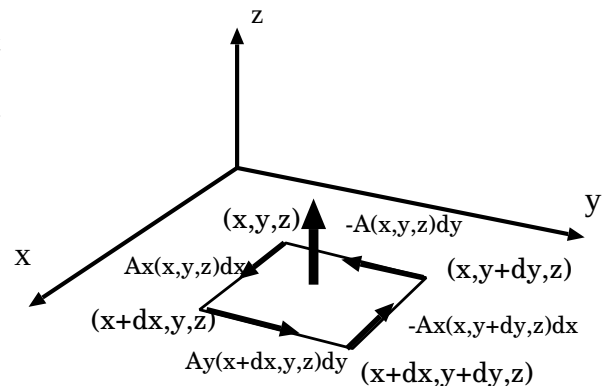
- 右辺は、**ある閉曲線C** についてのベクトル場の線積分である．
- 左辺の被積分関数には、微分演算子ナブラ ∇ とベクトル場 $\mathbf{A}$ とのベクトル積であり、これは**ベクトル場の回転 (rotation)** と呼ばれている．その積分は閉曲線Cで囲まれた**閉じた曲面**での面積分であり、被積分関数はベクトル場の回転と面上での法線ベクトルとの内積である．

簡易版の証明を示す．ガウスの定理の証明でも行ったように、左辺から右辺が出て来る様子を見ることにする．まず、簡単のために xy 平面に平行な微小な面を考える．面積要素を $dS = \Delta x \Delta y$ とすると、法線ベクトル $\mathbf{n}$ は z に平行になるので、積分の寄与は、

$$n_z (\nabla \times \mathbf{A})_z dS = n_z \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y$$

となるが、これは偏微分の定義、

$$\frac{\partial}{\partial x} A_y = \frac{A_y(x + \Delta x, y, z) - A_y(x, y, z)}{\Delta x}, \quad \frac{\partial}{\partial y} A_x = \frac{A_x(x, y + \Delta y, z) - A_x(x, y, z)}{\Delta y},$$



を使えば、左辺は、

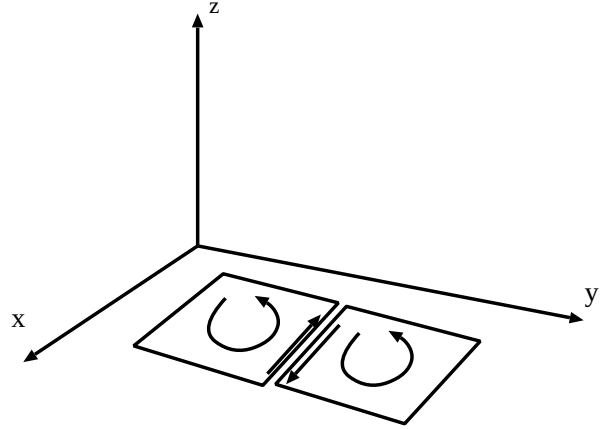
$$\mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) dS = A_y(x+\Delta x, y, z)\Delta y - A_y(x, y, z)\Delta y - A_x(x, y+\Delta y, z)\Delta x + A_x(x, y, z)\Delta x$$

となる。これは、図に書いてみるとわかるように、点 (x, y, z) から出発して、反時計回りに面積要素 dS の周囲を循環 (回転) する線積分に他ならない。すなわち、

$$\int_{\text{閉曲面で囲まれた微小面積}} \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) dS = \oint_{\text{微小閉曲面}} d\mathbf{x} \cdot \mathbf{A} \quad (27)$$

となり、微小面積 dS の場合はストークスの定理が成り立っていることが示せた。

次にこの閉曲面が2つ並んでいる場合を考える。全体を一つの閉曲面 S と考えることは、2つの閉曲線で囲まれた面 S_1, S_2 を別々に考えることは同じことになる。右辺の線積分領域の違いは、2つに分けて考えた場合は境界に余計に入る2本の線 (についての積分) だが、ここでの線積分の方向は逆方向であるので、その線での寄与はいつでもキャンセルされている。このことから、



$$\begin{aligned} \int_{\text{全平面 } S} \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) dS &= \int_{\text{部分面 } S_1} \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) dS + \int_{\text{部分面 } S_2} \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) dS \\ &= \left(\oint_{\text{微小閉曲面 } C_1} + \oint_{\text{微小閉曲面 } C_2} \right) d\mathbf{x} \cdot \mathbf{A} \\ &= \oint_{S \text{ を囲む閉曲面 } C} d\mathbf{x} \cdot \mathbf{A} \end{aligned} \quad (28)$$

となり、2つの閉曲面の場合にも成り立つことが示せた。このまま広い閉曲面の場合にも細かく分割することで同様に示せる。

さて、平坦な平面については証明できたとすると、次に一般の面についての場合が気になる。今、対象となるウネウネ平面を平坦な面で囲んでしまった閉曲面 S を考える (右図)。そこで、ベクトル場 $\nabla \times \mathbf{A}$ に対するガウスの定理 (発散定理) は、

$$\int \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) dV = \int \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) dS \quad (29)$$

ところで、左辺はベクトル場の性質よりゼロになる ($\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$)。

一方で、右辺は、

$$\int \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) dS = \left(\int_{\text{ウネウネ}} + \int_{\text{平坦}} \right) \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) dS = 0 \quad (30)$$

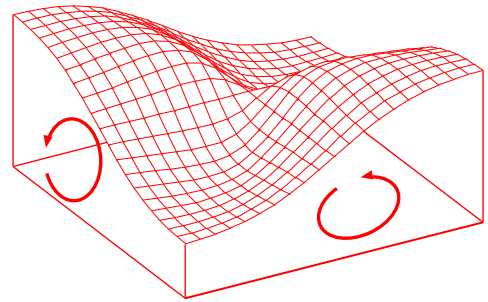
となるので、次のようになる。

$$\int_{\text{ウネウネ}} \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) dS = - \int_{\text{平坦}} \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) dS \quad (31)$$

右辺には、(すでに示した) Stokes の定理を使って、それぞれウネウネ面を囲んでいる平坦面の回りの線積分の和に置き換えられる。

$$\begin{aligned} \int_{\text{ウネウネ}} \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) dS &= - \left(\int_{-C_1} + \int_{-C_2} + \cdots \right) \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} \\ &= \int_{\text{ウネウネ周囲}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (32)$$

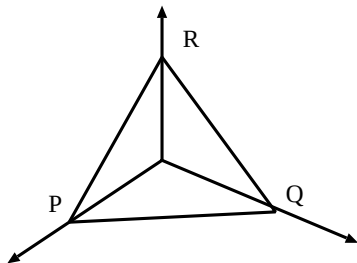
というわけで、ウネウネしていてもよいことがわかる。



上のウネウネ面についての Stokes の定理を示したい。こんな図でイメージつかめるだろうか?

1.2-10 [ストークスの定理の練習]:

これはストークスの定理の実感練習問題である。



$\nabla \times \mathbf{A} = (2y, 2z, 2x)$ であり、面 PQR は $x + y + z = 1$ で表されるので、面の法線ベクトルは $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ である。ここから左辺の被積分関数は、 $\mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = \frac{2}{\sqrt{3}}(x + y + z)$ であることがわかる。この面積分の実行は $z = 0$ すなわち xy 平面へ写像とるのが簡単である。

面 PQR の $z = 0$ 平面への写像は、領域: $(0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x)$ の三角形である。面 PQR 上の面積要素 dS と xy 平面の面積要素 $dx dy$ とは、それらの面のなす角 θ を用いて、 $\cos \theta = \frac{dx dy}{dS}$ であるが、この $\cos \theta$ は、 $\mathbf{n} \cdot (0, 0, 1) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ であるこ

とから,

$$\frac{dxdy}{dS} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \implies dS = \sqrt{3}dxdy$$

である. 面 PQR では $z = 1 - x - y$ であることに注意して, 左辺の積分は

$$\begin{aligned} \int_{\text{面 } PQR} dS \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) &= \int_{\text{面 } PQR} dS \frac{2}{\sqrt{3}}(x + y + z) \\ &= \int_{xy \text{ 面への写像面}} \sqrt{3}dxdy \frac{2}{\sqrt{3}}(x + y + 1 - x - y) \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dxdy 2 = \int_0^1 2(1-x) = 1. \end{aligned}$$

となる.

一方で, 右辺は3つの線積分からなる. まず, 線分 PQ から考える. 線分 PQ は, $z = 0$ と $x = 1 - y$ ($0 \leq x \leq 1$) の面の交線であるから, $dz = 0, dx = -dy$ である.

$$\int_{PQ} d\mathbf{x} \cdot \mathbf{A} = \int_{PQ} (z^2 dx + x^2 dy) = \int_0^1 dy(1-y)^2 = \frac{1}{3}.$$

同様に, 線分 QR と線分 RP もそれぞれ $1/3$ になるので, あわせると $\int_{PQ+QR+RP} d\mathbf{x} \cdot \mathbf{A} = 1$ である.

1.2-11 [保存力]:

力学で出てきた保存力を, ベクトル解析の知識を使って考えてみる. 力 $\mathbf{F}$ は, その仕事を経路に依存しないときに保存力と呼ばれる. それと同値関係にあることは $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ であることは, ストークスの定理から導かれる. ここでは力が保存力であることは, 仕事ではなくて rot を調べることから導くことにする. 具体的に与えられた力の性質から, それぞれの成分を見てみることにする. まずは, x 成分 $(\nabla \times \mathbf{F})_x$ と表す) である.

$$\begin{aligned} (\nabla \times \mathbf{F})_x &= \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial(f(r)z)}{\partial y} - \frac{\partial(f(r)y)}{\partial z} = z \frac{\partial f(r)}{\partial y} - y \frac{\partial f(r)}{\partial z} \\ &\downarrow \left(\frac{\partial}{\partial y} f(r) = \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial}{\partial r} f(r) = \frac{y}{r} \frac{\partial f}{\partial r} \right) \\ &= \frac{yz}{r} \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{yz}{r} \frac{\partial f}{\partial r} = 0 \end{aligned}$$

同様に, y, z 成分もゼロになることが示せる. ここから, この力 $\mathbf{F}$ は保存力だとわかる.

さて, 力 $\mathbf{F}$ が $\mathbf{F} = f(r)\mathbf{x}$ となる力は中心力と呼ばれる. 例として, ばねの復元力 $f(r) = \text{定数}$, 万有引力・クーロン力 $f(r) \propto 1/r^2$ などがある. 中心力は一般に保存力になることが, この練習問題で示されたことになる.

1.2-12 [ガウスの法則 (再度)+電位]:

次のレポート問題とする.

1.2-13 [電気双極子]:

電場と同様に電位も重ね合わせの原理から二つの電荷の電位を足し合わせることで求まる. また, 電位から電場は grad すれば求まる. ここでは電位から電場を求める練習問題です.

1. それぞれの電荷が持っているクーロン電位を2つ重ね合わせることで全体 $\phi(\mathbf{x})$ の電位を求める.

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-a)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+a)^2}} \right] \quad (33)$$

位置 $|\mathbf{x}|$ が電荷間の距離 $2a$ に比べて非常に大きい時にどのようなになるかを考える. まずは, $a/z \ll 1$ として, $a/z = 0$ の回りでの展開すると,

$$(z \pm a)^2 = z^2 (1 \pm 2a/z + O((a/z)^2)) \simeq z^2 \pm 2az$$

であるから, クーロン電位のそれぞれの項は,

$$(x^2 + y^2 + (z \pm a)^2)^{-1/2} \simeq (x^2 + y^2 + z^2 \pm 2az)^{-1/2} \simeq \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \mp \frac{az}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

となり, 式 (33) は,

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}) &\simeq \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2az}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ &\downarrow \text{ここで, } \mathbf{p} = (0, 0, 2aq), \mathbf{R} = (x, y, z) \text{ を使えば,} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3} \end{aligned} \quad (34)$$

となる. これは電気双極子と呼ばれている系であり, $\mathbf{p}$ を電気双極子モーメントと呼ぶ.

2. 続けて, この電位から電場を求めてみる. $|\mathbf{p}| = p = 2aq$ として,

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial}{\partial x} \phi = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3xz}{|\mathbf{R}|^5}, \\ E_y &= -\frac{\partial}{\partial y} \phi = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3yz}{|\mathbf{R}|^5}, \\ E_z &= -\frac{\partial}{\partial z} \phi = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\mathbf{R}|^3} - \frac{3z^2}{|\mathbf{R}|^5} \right). \end{aligned}$$

となる．ところで，こんな双極子とは何なのよ．というのは，自然な疑問である．意味も分からずにこんな計算させられるのは拷問のようかも知れない．正負の電荷が対で置かれているときに，遠くから眺めてみたときの電場なのだが，まず，クーロンの法則で与えられている逆二乗よりもずっと弱くなっている．しかし，ゼロではない．この状況は，導体でない物質に電場をかけたときのミクロな世界で起きていることのモデル化になっている．つまり，導体ならば，自由電子が電場を中和するように再配列できるが，誘電体では電子は物質中を自由に動きまわらず，ミクロな単位 (原子) 内で電場の方向に移動すると考えるわけだ．誘電体では，この電気双極子が沢山つまっている状況を一つのモデルとして考えることができる．この電気双極子が電場の中で受ける力を考えると，どうして紙が下敷に引きつけられる理由に近付けるでしょう (か?)．

等電位面や電気力線の絵を書いた学生さんは気づいたかも知れないが，NS 極を持つ棒磁石の磁力線と同じように見える．

1.2-14 [平板間の電位差]:

平板が無限に広いと考えると，平板間の**電場の大きさ**は場所に依存せずに $E = \frac{Q}{\epsilon_0 S}$ となる．ここで， S は平板の面積とする．電位差 V はちょうど片方の平板からもう一方の平板へ単位電荷をつれていくときの仕事である． d を平板間の距離とすると，

$$V = \int d\mathbf{x} \cdot \mathbf{E} = \int_0^d dz \frac{Q}{\epsilon_0 S} = \frac{Qd}{\epsilon_0 S}$$

となる．

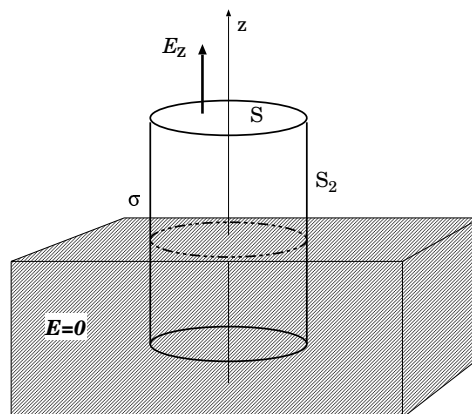
1.3 導体

1.3-1 [導体表面]:

静電平衡における導体の性質は次のとおりである．

- (a) 導体内部には電場はない．
- (b) 導体表面は面に垂直である．
- (c) 電荷は表面にのみ存在する．

このことに注意して，表面の (十分に平らだと思えるくらいに) 微小領域にガウスの法則を当てはめると，表面の電荷面密度を σ として，



$$E_z = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

となる.

1.3-2 [一様な帯電球の作る電場]:

これはレポート問題に近いので後ほど.

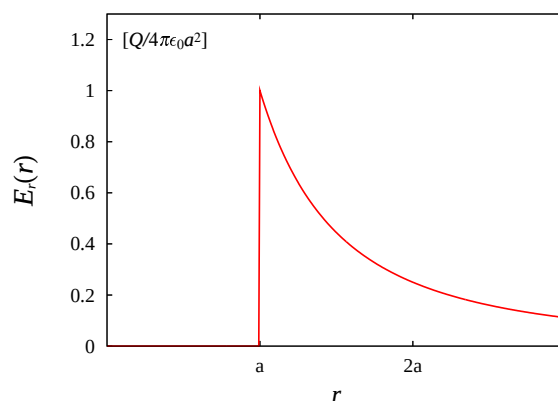
1.3-3 [導体球]: 静電場に関する以下の設問に答えよ. 答えだけでなく, 理由も明記せよ.

- (a) 半径 a の導体球に電荷 Q を与えたときに, その電荷は導体の表面に一様に分布する. これは半径 a の球殻に電荷 Q を与えた問題と同じになる. この, 電場は動径方向を向いていて,

その大きさ $E(r)$ は,

$$E(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & \text{for } r \geq a \\ 0 & \text{for } r < a \end{cases} \quad (35)$$

となる. 右にグラフを示す.

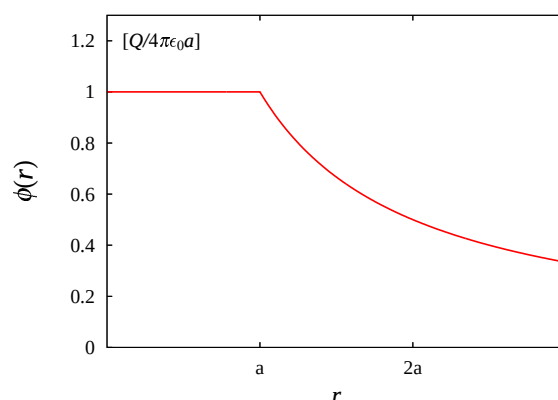


- (b)

電位は, 無限遠を基準として, $r \geq a$ に対しては,

$$\begin{aligned} \phi(r) &= - \int_{\infty}^r dr' E(r') = - \int_{\infty}^r d'r \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \end{aligned} \quad (36)$$

となり, $r < a$ では電場はゼロなので電位は一定で, $\phi(r) = \phi(a) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}$ である.



- (c) 二つの**導体球の電位**はそれぞれ $\phi_a = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}$, $\phi_b = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 b}$ である. 2つの導体の距離は非常に離れていて, お互いに影響を及ぼさない (つまり, 静電誘導しないほど離れているとする) とする. 導線で繋いだ後は, 二つの球は一つの導体となるので電位は一定である. それぞれの導体に接続後に貯る電荷量を

Q', q' とすると、接続後の導体の電位 ϕ は、

$$\phi = \frac{Q'}{4\pi\epsilon_0 a} = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 b}$$

である．総電荷量は不変なので、 $Q + q = Q' + q'$ である．これらより、移動後の電荷は、

$$q' = \frac{b}{a+b}(q+Q), \quad Q' = \frac{a}{a+b}(q+Q)$$

であることがわかる．それぞれ変化分は、

$$q' - q = \frac{-aq + bQ}{a+b}, \quad Q' - Q = \frac{aq - bQ}{a+b}$$

であり、例えば $aq - bQ > 0$ ならば、小さな球から大きな球に $Q' - Q$ の電荷が移動することになる．

- (d) 導線で離れた後では、必ずそれぞれの電荷の間には、 $Q'/a = q'/b$ の関係がある．表面電場の大きさは、 $E_a = \frac{Q'}{4\pi\epsilon_0 a^2}$, $E_b = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 b^2}$ であるが、それらを比は、

$$\frac{E_a}{E_b} = \frac{Q'/a^2}{q'/b^2} = \frac{b}{a} < 1$$

となる．つまり、半径の小さな導体球の表面電場の方が大きいことがわかる．これが冬にドアで指先からバチッと電気が流れることの簡単な説明である．

1.3-4 [導体系にガウスの法則を使う]:

レポート問題なので、解答例は後ほど．

1.3-5 [導体球]:

導体についていろいろ考えてみようというのが問題の趣旨です．

- (a) まずは電荷分布がどのようなになっているかを定性的に考えてみよう．定性的なので、どこまで考えるかは不定だが、わかる範囲で答えてみることにする．まず、内側の導体球については、導体内部に電荷は安定に存在できないから⁹、導体の表面に分布することになるが、導体では等電位になっていることから、**「導体球 A の表面での電荷量 q_A は一様に分布することになる」**．

次に導体球殻 B を考える．B には 2 つの表面がある．一つは外側面、もう一つは内側面である．どちらも球表面なので、A と同様に電荷は一様に分布する．その電荷量は、導体球殻 B 内部に閉曲面を考えて、ガウスの法則を当てはめることによりわかる．内側面にある総電荷量を q' とし、導体内部に電場

⁹導体の内部に電場が存在できない、あるいは導体内部は等電位になることからこの性質は出て来る．では、この導体内部に電場がない理由は、導体の自由電子が電場を中和するように動くからだというのが講義での説明であった．もう少し説明出来ないのだろうか．…つづく．

がないことを考えると、ガウスの法則から $0 = q_A + q'$ がわかる。 q_A は導体球 A の持っている電荷であるが、内側に誘起される電荷量は $q' = -q_A$ である。 B には電荷 q_B が与えられていたので、内側面に $-q_A$ の電荷が誘起されたとしたら、外側面には $q_A + q_B$ が出てきているはずである。 **導体球殻 B には内側面に電荷量 $-q_A$ が、外側面には $q_A + q_B$ がそれぞれ一様に分布している。**

- (b) 導体 A, B ではそれぞれ等電位になっているが、その電位を求めてみよう。それぞれ導体表面に一様分布した球殻の作る電位を求めればよい。導体球の中心からの距離 r が $r > b$ での電場は動径成分 E_r のみ存在し、その大きさは、 $E_r(r) = \frac{q_A + q_B}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ である。外側の球殻での電位 ϕ_B は、無限遠を基準として、

$$\phi_B = - \int_{\text{無限遠}}^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{x} = - \int_{\infty}^b E_r dr = \frac{q_A + q_B}{4\pi\epsilon_0 r} \Big|_{\infty}^b = \frac{q_A + q_B}{4\pi\epsilon_0 b}$$

となる。また、導体球での電位 ϕ_A は、

$$\begin{aligned} \phi_A &= \phi_B - \int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{x} = \frac{q_A + q_B}{4\pi\epsilon_0 b} - \int_b^a \frac{q_A}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_A + q_B}{b} + \frac{q_A}{a} - \frac{q_A}{b} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_B}{b} + \frac{q_A}{a} \right) \end{aligned}$$

である。

- (c) この二つの導体を針金でつないだときには、電位差があれば電場が生じて、電荷を移動させる。電位差をみると、 $q_A > 0$ であることから、

$$\Delta\phi \equiv \phi_B - \phi_A = \frac{q_A}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right] < 0$$

となり、いつでも ϕ_A の方が大きい。つまり、針金でつなぐと、A から B に電流がながれることになる。この結果は q_B の存在にはまったく依存していないことは不思議である。正でも負でも外側に電流は流れるのである。その移動電荷量は、電位差が無くなるまでである。移動後の A, B の電荷量を q'_A, q'_B とすると、それらには、電荷保存より、 $q_A + q_B = q'_A + q'_B$ であり、また、等電位の条件

$$\phi'_B = \frac{q'_A + q'_B}{4\pi\epsilon_0 b} = \phi'_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q'_A}{a} + \frac{q'_B}{b} \right)$$

を満たす必要がある。これらを解くと、 $q'_A = 0, q'_B = q_A + q_B$ となる。つまり、移動後には全ての電荷が B の方に移動するというわけである。 **電流は A から B に流れ、その移動電荷量は q_A である。**

- (d) 導体をつなぐことで、その前後のエネルギーはどうなるかを議論してみよう。前と後のエネルギーをそれぞれ計算して、差をとってみればよい¹⁰。接続前

¹⁰ もっと賢くするには、導体球のエネルギーが計算するだけでよいことがわかる。移動前後で導体球殻の電位が全く変わっていないことに注意すると、変化があったのは導体球 A に電荷がなくなったことである。

のエネルギー U_b ¹¹は、

$$U_b = \frac{1}{2}q_A\phi_A + \frac{1}{2}q_B\phi_B = \frac{1}{2}q_A \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_A}{a} + \frac{q_B}{b} \right) + \frac{1}{2}q_B \frac{q_A + q_B}{4\pi\epsilon_0 b}$$

であり、一方、接続後のエネルギー U_a は、

$$U_a = \frac{1}{2}q'_B\phi'_B = \frac{1}{2}(q_A + q_B) \frac{q_A + q_B}{4\pi\epsilon_0 b}$$

なので、そのエネルギー差は、

$$U_a - U_b = \frac{q_A^2}{8\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right] < 0$$

となる。つまり、**エネルギーはいつでも減ることがわかった**¹²。さて、減ってしまったエネルギーはどこへ行ってしまったのだろうか？これは電荷の運動エネルギーに変わったわけだが、普通は導体の中を電流が流れる時に格子との散乱によりジュール熱が発生して逃げてしまう¹³。

¹¹電荷が分布している場合の静電エネルギーは、 $U = \frac{1}{2} \int dV \rho \phi$ で与えられる。

¹²エネルギーが減るのは自然な方向なので当たり前のことだろうか？もしも、エネルギーなる量を定義しているのであれば、ちゃんと計算して示すことができるはずである。「エネルギーが低い状態というのは、安定な状態である。」と「安定な状態に系は移行する」では説明できていないと思う。安定な状態とは... エネルギーが低い状態... では議論がグルグル回っているだけである。講義では、高校の物理の公式の羅列の中でどの位のことが物理の議論で出て来るのか、あるいはお互いどのように絡まっているのかを示して来たつもりであった。こういうウルトラ C を無批判に信じないために... だが...

さて、上では実際に計算して、エネルギーが下がることを示した。その「自然な方向」が計算して示されたわけだ。我々の考察の外から自然の方向として、エネルギーが下がることを考えなくても、すでに我々の考察のどこかにその性質が入っていたことになる。それはどこだろうか？ここで、質問を投げ出してもよいのだが、もう少しだけ議論しよう。導体の性質は、**導体中では等電位になるように電荷が分布すること**であった。ここでは針金でくっつけることで、一つの導体になったわけだが、この導体の中で等電位になるように電荷の配置換えが起こった。この等電位への移行がエネルギーを低くすることと関係しているわけである。一般的に、**「静電エネルギーを最小にするような電荷の配置は、その電位を一定にする配置である」**ことが証明できる。ある閉じた空間で、任意の適当な電荷分布 ρ' に対する電位 ψ と等電位 ϕ を与える電荷分布 ρ の静電エネルギーを比べると、後者がいつも小さい、すなわち最小を与えることが示せる。これは宿題にしよう。示すべきは、

$$U' - U = \frac{1}{2} \int dV \rho' \psi - \frac{1}{2} \int dV \rho \phi = \frac{\epsilon_0}{2} \int dV (\nabla \psi)^2 - \frac{\epsilon_0}{2} \int dV (\nabla \phi)^2 \geq 0$$

である。

さて、実際にこのエネルギー最小を要請することで移動後の電荷を求めてみよう。接続後のエネルギーは、 U_b の式の電荷を q'_A, q'_B にすればよく、全電荷量 $q'_A + q'_B = q_{tot}$ は定数であることに注意すると、

$$U_b(q'_A) = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{q'^2_A}{a} + 2 \frac{q'_A q'_B}{b} + \frac{q'^2_B}{b} \right) = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \left(\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) q'^2_A + \frac{q'^2_{tot}}{b} \right)$$

となる。これを q'_A を変数とした時に、 $q'_A = 0$ が最小を与える。

¹³ここでも、ジュール熱として逃げるのでエネルギーが下がるという、逆の説明はまずい。散乱が起きない、つまり電気抵抗のない超伝導体で作られた針金の場合にはエネルギーが逃げないことになってしまうが、これがウソなことは上の計算が示している。電気抵抗があれば、そこでエネルギーを開放してしまうが、超伝導体でつないだ場合は、電荷は安定に静止することができなくて、振動をくり返すことになる。それでもエネルギーは開放されるが、それはアドバンスな電磁気で議論するだろう。

1.3-6 [鏡映法 1]: 鏡映法により、導体近傍の電場を求める問題である。鏡映法は、導体表面を鏡だと思って、導体の外にある電荷の鏡像の位置に反対符号の電荷を置くことで電場を求める方法である。この方法だと、ある解の候補はすぐに思い付くだろう。次に、それが正しいかどうかを**どのように**調べるが問題となる。

導体から距離 d の位置に電荷 q があるので、鏡像電荷は $-d$ の位置に $-q$ の電荷があることになる。それぞれの電荷の位置ベクトルを $\mathbf{x}_1 = (0, 0, d)$, $\mathbf{x}_2 = (0, 0, -d)$ として、これらの電荷の作る位置 $\mathbf{x}$ での電場は重ね合わせの原理から、

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|^3} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_2}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_2|^3}$$

である。導体の内部ではもちろん電場はゼロであるので、この表式は導体の外側でのみ正しい。

この電場が確かに導体の性質を満たしていることを確認しておく。まず、導体表面ではこの電場は導体面に垂直でなくてはならない。導体表面は、面 $z = 0$ であり、 $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1| = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_2|$ を満たす位置ベクトル $\mathbf{x} = (x, y, 0)$ である、そこでは、 $E_x = E_y = 0$ となっており、

$$E_z(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|^3} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_2|^3} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2d}{|x^2 + y^2 + d^2|^{3/2}}$$

となり、 z 方向にのみ成分があることがわかる。

一方で、導体表面の電場とそこでの表面電荷密度の関係は問題 1.3-1 に示してある。表面電場が求まったので、これを用いて、この導体表面の電荷密度が

$$\sigma(\mathbf{x}) = \epsilon_0 E_z(\mathbf{x}) = -\frac{q}{4\pi} \frac{2d}{|x^2 + y^2 + d^2|^{3/2}}$$

と求まる。下にその表面電荷密度をグラフに示す。ちょうど、電荷 q の真下の位置に負の大きな電荷が誘起されていることがわかる。

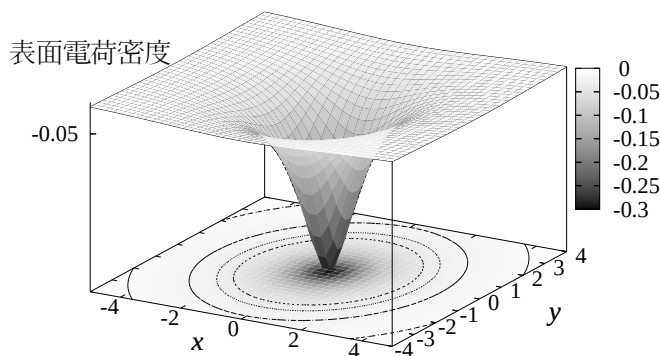


図 6: 点電荷を $(0, 0, 1)$ に置いた場合の $z = 0$ 平面上に誘起される表面電荷分布とその等高線。縦軸のスケールは適当に決めた。

さて、導体表面に誘起された電荷の総量 Q を求めておく。表面電荷密度を全表面で積分すればよい。

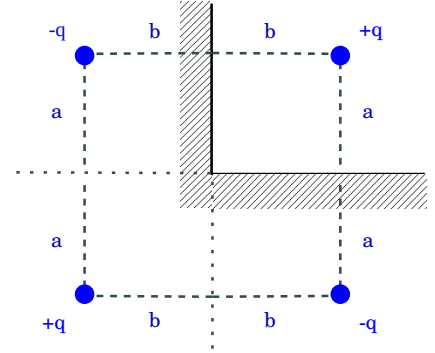
$$\begin{aligned}
 Q &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \sigma(\mathbf{x}) = - \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2d}{|x^2 + y^2 + d^2|^{3/2}} \\
 &\quad \downarrow \text{ここで極座標を用いる。}^{14} \\
 &= - \int_0^{\infty} r dr \int_0^{2\pi} d\theta \frac{q}{4\pi} \frac{2d}{|r^2 + d^2|^{3/2}} = - \frac{2dq}{4\pi} 2\pi \int_0^{\infty} dr \frac{r}{|r^2 + d^2|^{3/2}} \\
 &= -dq \left[-\frac{1}{|r^2 + d^2|^{1/2}} \right]_0^{\infty} = -q
 \end{aligned}$$

となる。実際に導体表面に誘起された電荷の総量が鏡映電荷は $-q$ に等しいことが確認できる。

1.3-7 [鏡映法 2]:

前問に引き続き、鏡映法の問題である。

正しい鏡映電荷配置は、図のようである。xy 平面で切り取ったときに、第二、第三象限に負電荷 $-q$ を置くだけでなく、第四象限にも正電荷 $+q$ を置く必要がある。もともとの電荷の位置を $\mathbf{r}_1 = (b, a, 0)$ 、それぞれの鏡映電荷の位置ベクトルを、 $\mathbf{r}_2 = (-b, a, 0)$ 、 $\mathbf{r}_3 = (-b, -a, 0)$ 、 $\mathbf{r}_4 = (b, -a, 0)$ とする。さて、導体を忘れて、この四つの点電荷配置での位置 $\mathbf{x}$ での電位は、



$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}_1|} - \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}_2|} + \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}_3|} - \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}_4|} \right) \quad (37)$$

となる。この問題での我々の電位に対する要請は、導体表面で電位が定数¹⁵となることである。そうすれば、導体表面での電場はその表面に垂直方向だけになる¹⁶。導体表面は、 $\mathbf{x}_1 = (x > 0, y = 0, z)$ と $\mathbf{x}_2 = (x = 0, y > 0, z)$ で表される。 $\mathbf{x}_1$ について、 $|\mathbf{x}_1 - \mathbf{r}_1| = |\mathbf{x}_1 - \mathbf{r}_4|$ また $|\mathbf{x}_1 - \mathbf{r}_2| = |\mathbf{x}_1 - \mathbf{r}_3|$ であることから、

$$\phi(\mathbf{x}_1) = 0 \quad (38)$$

がわかり、同様に $\phi(\mathbf{x}_2) = 0$ であることもわかる。これで式 (37) が求めたい電位であることが示された。電場は、各成分ごとに表すと、

$$E_x(\mathbf{x}) = -\frac{\partial}{\partial x} \phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{x-b}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}_1|^3} - \frac{x-b}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}_4|^3} - \frac{x+b}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}_2|^3} + \frac{x+b}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}_3|^3} \right)$$

¹⁴ $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ とすると、 $dx dy = r dr d\theta$ になる。

¹⁵ 必ずしも 0 になる必要はない。そもそも電位には定数の不定性があったことを思い出そう。その定数は電場 $\mathbf{E} = -\nabla \phi$ には寄与しない。

¹⁶ もし水平成分がゼロでないとすると、導体中の自由に動ける電荷がその電場方向に移動し、最終的には電場を中和するように電荷配置が変わる。

$$E_y(\mathbf{x}) = -\frac{\partial}{\partial y}\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{y-a}{|\mathbf{x}-\mathbf{r}_1|^3} - \frac{y-a}{|\mathbf{x}-\mathbf{r}_2|^3} + \frac{y+a}{|\mathbf{x}-\mathbf{r}_3|^3} - \frac{y+a}{|\mathbf{x}-\mathbf{r}_4|^3} \right)$$

$$E_z(\mathbf{x}) = -\frac{\partial}{\partial z}\phi = \frac{qz}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{r}_1|^3} - \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{r}_2|^3} + \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{r}_3|^3} - \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{r}_4|^3} \right)$$

比例定数は適当に設定し、電位と電場を下図に描いておく。

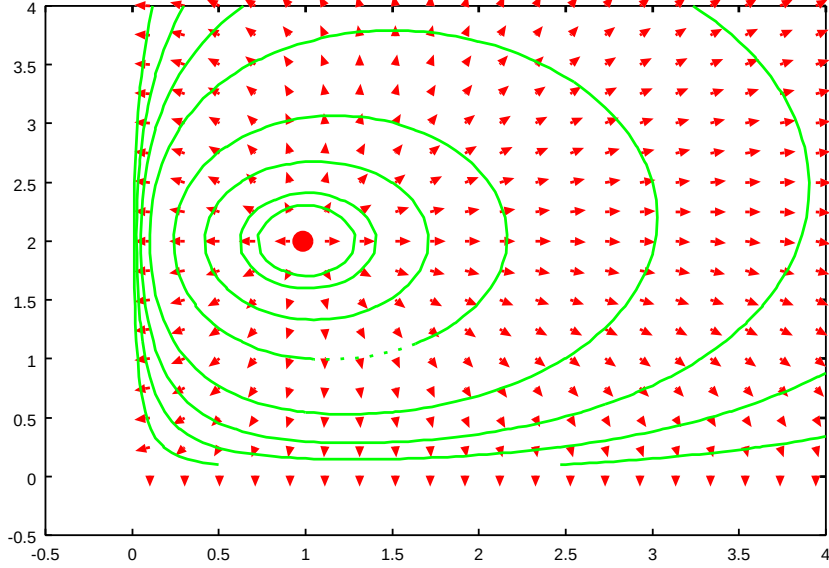


図 7: 点電荷を $(1, 2, 0)$ に置いた場合の $z = 0$ 平面上での等電位線 (線) と電場 (矢印)。

次に導体表面に誘起された電荷分布を示す¹⁷。ガウスの法則から、導体表面での電場の法線成分と誘起電荷面密度の関係は、 $E_n = \sigma/\epsilon_0$ なので、平面 $y = 0$ と $x = 0$ 上の電荷密度をそれぞれ σ_y 、 σ_x と書くと、

$$\sigma_{y=0} = \epsilon_0 E_y(\mathbf{x}_1) = \frac{-qa}{2\pi} \left(\frac{1}{((x-b)^2 + a^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{1}{((x+b)^2 + a^2 + z^2)^{3/2}} \right)$$

$$\sigma_{x=0} = \epsilon_0 E_x(\mathbf{x}_2) = \frac{-qb}{2\pi} \left(\frac{1}{(b^2 + (y-a)^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{1}{(b^2 + (y+a)^2 + z^2)^{3/2}} \right)$$

となる。 $\sigma_{y=0}$ について、図に描いてみる (図 8)。

さて、最後の課題はこの誘起電荷分布を導体表面で積分するとどうなるかを調べることである。もちろん、これは先に導入した鏡映電荷の合計に等しくなっているはずである。ここで少し漠然とした疑問がある。無限平面の近くに 1 つだけ点

¹⁷ くだいかも知れないが、あくまでも鏡映法は、境界値問題のひとつの解き方であって、決して鏡映電荷が導体の中に出てくるわけではない。導体に誘起される電荷分布は表面にのみ現れる。その誘起された問題と鏡映電荷の問題が、導体の外側では全く等価だということを注意しておく。

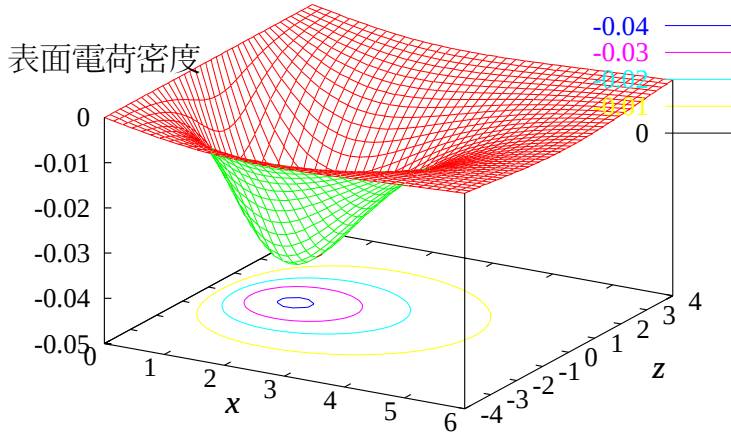


図 8: 点電荷を $(1, 2, 0)$ に置いた場合の $y = 0$ 平面上に誘起される表面電荷分布とその等高線。縦軸のスケールは適当に決めた。

電荷がある場合は、誘起電荷を与える項はその点電荷から来ていた。今回の場合、平面は $y = 0$ と $z = 0$ の 2 つに分けられるが、 $\sigma_{y=0}$ にも $\sigma_{z=0}$ にも全ての点電荷の項が入っている。それぞれ独立に計算 (できた) すると $-q/2$ ずつ分配されて出てくるのだろうか。

まず、 $y = 0$ 平面上に誘起される全電荷 $q_{y=0}$ は、

$$\begin{aligned} q_{y=0} &= \int_0^\infty dx \int_{-\infty}^\infty dz \sigma_{y=0} \\ &= \frac{-qa}{2\pi} \int_0^\infty dx \int_{-\infty}^\infty dz \left(\frac{1}{((x-b)^2 + a^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{1}{((x+b)^2 + a^2 + z^2)^{3/2}} \right) \end{aligned}$$

この積分は少し難しいが、次のようになる。被積分関数の x 依存性だけがちがうのが気持ち悪いので、 $x \pm b \rightarrow x'$ 変数変換すると、測度は不変で積分領域がずれる。

$$\begin{aligned} q_{y=0} &= \frac{-qa}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty dz \left(\int_{-b}^\infty dx - \int_b^\infty dx \right) \frac{1}{(x^2 + a^2 + z^2)^{3/2}} \\ &= \frac{-qa}{\pi} \int_0^\infty dz \int_{-b}^b dx \frac{1}{(x^2 + a^2 + z^2)^{3/2}} \\ &\downarrow z \text{ について積分 } \int dz \frac{1}{(A^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{z}{A^2(z^2 + A^2)} \\ &= \frac{-qa}{\pi} \int_{-b}^b dx \left[\frac{z}{(x^2 + a^2)(z^2 + x^2 + a^2)^{1/2}} \right]_0^\infty \\ &= \frac{-qa}{\pi} \int_{-b}^b dx \frac{1}{x^2 + a^2} \\ &\downarrow x = a \tan \theta, dx = a \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{qa}{\pi} \int_{\arctan(-b/a)}^{\arctan(b/a)} d\theta a \frac{1}{\cos^2 \theta} \frac{1}{a^2(1 + \tan^2 \theta)} \\
&= -\frac{q}{\pi} (\arctan(b/a) - \arctan(-b/a)) = -\frac{2q}{\pi} \arctan(b/a) \quad (39)
\end{aligned}$$

$x = 0$ 平面についても同様な計算から、

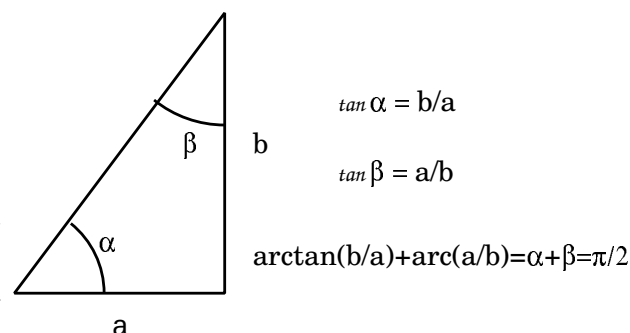
$$q_{x=0} = -\frac{2q}{\pi} \arctan(a/b) \quad (40)$$

となり、全誘起電荷 q_{tot} は、

$$\begin{aligned}
q_{tot} &= -\frac{2q}{\pi} (\arctan(b/a) + \arctan(a/b)) \\
&\downarrow \arctan(b/a) + \arctan(a/b) = \frac{\pi}{2} \\
&= -q \quad (41)
\end{aligned}$$

これで誘起電荷が鏡映電荷の合計に等しいことが示された。最後の $\arctan$ の関係式はなかなか気づきにくい、図で描くと良く分かる。

先程の電荷の分配の疑問だが、上記のように点電荷の位置のずれに反映して2つの平面に移る電荷の大きさが変わって来る。ちょうど位置が $\mathbf{r}_1 = (a, a, 0)$ のときに $-q/2$ づつに分かれている。



1.4 コンデンサーと電気容量

- 1.4-1 [球殻導体のコンデンサー容量]: 半径 a と $b(>a)$ の二つの導体球にそれぞれ $\pm Q$ の電荷を与えたとすると、それらの球殻の間の電場は放射線状で、その大きさ E_r は原点からの距離 r のときに $E_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ である。したがって、球殻導体間の電位差は、

$$\phi_a - \phi_b = \int_A^B d\mathbf{r} \cdot \mathbf{E} = \int_a^b dr E_r = \int_a^b dr \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

である。比例係数から電気容量は、

$$C = \frac{Q}{\phi_a - \phi_b} = 4\pi\epsilon_0 \frac{1}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$$

となる。

関連する問題:地球の静電容量： 地球を大きな導体と考えるとその電気容量はどの位だろうか．半径 a の球導体に電荷量 q を与えれば，その電位は無限遠を基準として， $\phi = q/4\pi\epsilon_0 a$ である．この場合の静電容量は， $C = q/\phi = 4\pi\epsilon_0 a$ であり、 $a = 6400\text{Km}$ を代入すると， $C = 4 \times 3.14 \times 8.85 \times 10^{-12} \times 6.4 \times 10^6 \simeq 7.1 \times 10^{-4} [F]$ である．例えば，1C の電気量を貯めるのに，1400V もかかってしまう．そこら辺の小さなコンデンサーでも数十 μF 程度あるのを考えると，ちょっと地球に電荷を貯めるのは効率悪そうである．

1.4-2 [コンデンサーの合成]:

- (a) まず C_2 と C_3 は並列なので，合成容量は $C_2 + C_3 = 6\mu F$ となり， C_1 との直列接続から，合計電気容量は，

$$C_{tot} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2+C_3}} = \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}} \mu F = 2\mu F$$

となる．

- (b) 全体に貯まる電荷量とコンデンサー C_1 に貯まる電荷量が同じであることから M での電位を求める．AM 間の電位差を V_{AM} とすると，

$$V_{AM} \times 3\mu F = 200V \times 2\mu F \implies V_{AM} = \frac{400}{3} V$$

となる．A の位置の電位を 0 とすると，位置 M の電位は $\frac{400}{3} V$ となる．

- (c) C_1 の電荷量は， $3\mu F \times \frac{400}{3} V \simeq 4.0 \times 10^{-4} C$
 C_2 の電荷量は， $2\mu F \times (200 - \frac{400}{3}) V \simeq 1.3 \times 10^{-4} C$
 C_3 の電荷量は， $4\mu F \times (200 - \frac{400}{3}) V \simeq 2.7 \times 10^{-4} C$

1.4-3 [コンデンサーをつないだとき...]:

この問題の趣旨は，導体コンデンサーの性質を通じて，電位と電荷の動きを理解することがである．ここでは 1.3-5 の問題を一般的にして，コンデンサーの形状によらない議論をする．

まず，静電容量が C_1 と C_2 のコンデンサーの接続前の電荷量をそれぞれ Q_1 , Q_2 とする．接続後にそれらは Q'_1 と Q'_2 に変化したとする．電荷の保存より， $Q_1 + Q_2 = Q'_1 + Q'_2$ であり，電荷の移動量を Δ とすると，それを用いて $Q'_1 = Q_1 - \Delta$, $Q'_2 = Q_2 + \Delta$ と表せる．ここで Δ はコンデンサー 1 から 2 への電荷の移動を正の方向としている．

接続後は，2つの導体は1つの導体になりことから，電位は一定になる．その電位を ϕ' は，接続後の電荷量と容量を用いて，

$$\phi' = \frac{Q'_1}{C_1} = \frac{Q_1 - \Delta}{C_1} = \phi_1 - \frac{\Delta}{C_1} = \frac{Q'_2}{C_2} = \frac{Q_2 + \Delta}{C_2} = \phi_2 + \frac{\Delta}{C_2}$$

と表せる．この式を Δ について解けば，

$$\Delta = (\phi_1 - \phi_2) / \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) = \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} (\phi_1 - \phi_2)$$

となる． $\phi_1 \geq \phi_2$ の場合は， $\Delta \geq 0$ となり，電荷は 1 から 2 へ移動し，逆に $\phi_1 \leq \phi_2$ の場合は 2 から 1 へ移動する．いずれの場合も，**電位の高い方から低い方へ電荷は移動している**ことがわかる．

また，その時の電位は，

$$\phi' = \phi_1 - \frac{\Delta}{C_1} = \phi_1 - \frac{C_2}{C_1 + C_2} (\phi_1 - \phi_2) = \frac{C_1 \phi_1 + C_2 \phi_2}{C_1 + C_2}$$

である．

さて，この導体の静電エネルギーを考えてみよう．電荷を Q ，電位を ϕ としたときに，静電エネルギーは $\frac{1}{2} Q \phi$ で与えられる．この問題の 2 つの導体の接続前後でのエネルギーを計算してみる．接続前は，

$$E_{\text{前}} = \frac{1}{2} Q_1 \phi_1 + \frac{1}{2} Q_2 \phi_2 = \frac{1}{2} (C_1 \phi_1^2 + C_2 \phi_2^2)$$

であり，一方で接続後のエネルギーは，

$$E_{\text{後}} = \frac{1}{2} (Q_1 + Q_2) \phi' = \frac{1}{2} (Q_1 + Q_2) \frac{C_1 \phi_1 + C_2 \phi_2}{C_1 + C_2} = \frac{1}{2} \frac{(C_1 \phi_1 + C_2 \phi_2)^2}{C_1 + C_2}$$

である．その差を計算してみると，

$$E_{\text{後}} - E_{\text{前}} = \frac{1}{2} \left(\frac{(C_1 \phi_1 + C_2 \phi_2)^2}{C_1 + C_2} - C_1 \phi_1^2 - C_2 \phi_2^2 \right) = -\frac{1}{2} \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} (\phi_1 - \phi_2)^2$$

である．その差を計算してみると，

$$E_{\text{後}} - E_{\text{前}} = \frac{1}{2} \left(\frac{(C_1 \phi_1 + C_2 \phi_2)^2}{C_1 + C_2} - C_1 \phi_1^2 - C_2 \phi_2^2 \right) = -\frac{1}{2} \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} (\phi_1 - \phi_2)^2$$

となる．つまり，**接続後のエネルギーはいつでも減る**ことがわかった．エネルギーが下がらない場合は，接続前の電位差が無い場合で，その時は電荷は移動しない．

1.4-4 [コンデンサーのエネルギー]:

電気容量が C_1 のコンデンサーに q_1 の電荷を与えたときの電位は $\phi_1 = q_1 / C_1$ である．導体の電位は一定であり，そこに電荷 q_1 があるのでコンデンサーのエネルギーは， $\frac{1}{2} q_1 \phi_1 = \frac{1}{2} q_1^2 / C_1$ である．したがって，二つのコンデンサーの接続前のエネルギーの合計は， $E_b = \frac{1}{2} (q_1^2 / C_1 + q_2^2 / C_2)$ である．一方で，並列に接続した後の電気容量は， $C_1 + C_2$ であり，そこに $q_1 + q_2$ の電荷が貯るわけだから，エネルギーは， $E_a = \frac{1}{2} (q_1 + q_2)^2 / (C_1 + C_2)$ である．この差は，

$$E_a - E_b < 0$$

であることがわかる．これは前問と同じである．

1.4-5 [コンデンサー]:

- (a) 導体板は非常に大きいと簡単化したので、一様な面密度 $\sigma = \frac{q}{S}$ で帯電した無限に広い平板の作る電場を考えればよい。この電場は平板に垂直方向のみ成分を持ち、平板から離れる方向で、その大きさは $|\mathbf{E}| = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{q}{2\epsilon_0 S}$ である。
- (b) 導体板 B も同様に考えると、今度は電荷の符号が負なので、平板に向かう方向で、やはりその大きさは $|\mathbf{E}| = \frac{q}{2\epsilon_0 S}$ である。この二つの電場を方向に注意して重ね合わせると、導体板の間での合計の電場は導体板 A から B に向かう方向に大きさ $|\mathbf{E}| = \frac{q}{\epsilon_0 S}$ を持つことがわかる。ちなみに、導体板の外側は方向が逆向きになっており、 $\mathbf{0}$ になる。
- (c) 二枚の導体板間の電位差 ϕ_{AB} を求めてみる。導体板間の電場は導体板に垂直で場所に依らず一定の値 $\frac{q}{\epsilon_0 S}$ であることから、

$$\phi_{AB} = \int_A^B d\mathbf{x} \cdot \mathbf{E} = \int_0^d dz \frac{q}{\epsilon_0 S} = \frac{qd}{\epsilon_0 S}$$

であることがわかる。ここから、電位差 ϕ_{AB} と電荷量 q は比例関係にあることがわかり、その比例係数として、電気容量 C は、

$$C = \frac{q}{\phi_{AB}} = \epsilon_0 \frac{S}{d}$$

となることがわかる。コンデンサーの電気容量を大きくするためには、面積 S を大きく、距離 d を小さくすればよいことがわかる。

- (d) このコンデンサーに蓄えられたエネルギーは次の二通りの考え方で求めてみる。最初は、電荷が蓄えられていない状態から、導体板 B から $+q$ の電荷を導体板 A に移動するために必要なエネルギーを考える。電荷が既に q' 移動した後に微小な電荷量 dq' を移動するために必要なエネルギー dU は、 $dU = \phi_{AB}(q')dq' = \frac{q'd}{\epsilon_0 S}dq'$ である。ゆえに、電荷が q になるまでのエネルギー U は、

$$U = \int dU = \int_0^q \frac{q'd}{\epsilon_0 S} dq' = \frac{d}{\epsilon_0 S} \frac{q^2}{2} = \frac{dq^2}{2\epsilon_0 S}$$

である。

一方、エネルギーは電場のエネルギーと考えることができる。電荷が蓄えられた状態での電場のエネルギーは、

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int dV |\mathbf{E}|^2 = \frac{\epsilon_0}{2} \int dV \left(\frac{q}{\epsilon_0 S} \right)^2 = \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{q}{\epsilon_0 S} \right)^2 Sd = \frac{q^2 d}{2\epsilon_0 S}$$

となり、同じ結果を得る。

1.4-6 [円柱コンデンサーの電気容量]:

外径 a の円筒型導体 A および内径 $b(>a)$ の導体 B が同心に置かれている場合の静電容量を求めてみる。それぞれに正負同量の電荷を与えると、それらの電荷は A の外側の表面と B の内側面に一様に分布する。この導体系の電場は、円筒導体が無限に長いと考えると、導体と平行な電場は存在しないので、動径方向で中心からの距離 r だけの関数である。そこでガウスの法則より、電場の動径成分 E_r は、電荷の単位長さ辺りの電荷を λ として、 $E_r = \lambda/2\pi\epsilon_0 r (a < r < b)$ となる。導体の外側 $r > b$ では電場はゼロになっている¹⁸。そこで、両導体の電位差は、

$$\phi_A - \phi_B = \int_a^b E_r dr = \int_a^b \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log \frac{b}{a}$$

これより、軸方向の単位長さ当たりの静電容量 C' は

$$C' = \frac{\lambda}{\phi_A - \phi_B} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\log \frac{b}{a}}$$

となる。

1.4-7 [一様帯電球の静電エネルギー]:

ここでも静電エネルギーを二種類の方法で求めてみる。

(1) 静電ポテンシャルからの計算:

半径 a の球になるまで電荷を蓄える時のエネルギーを球殻を付け加える過程にそって計算してみる。まず、半径 r まで電荷が貯ったとする。そのときの電荷 $q(r)$ は、 $q(r) = \frac{4\pi r^3 \rho}{3}$ である。この電荷が電荷球の外側につくる電場は、その電荷が中心に集まった点電荷と同じなので、方向は動径方向であり、大きさ E_r は、 $E_r = \frac{q(r)}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ である。この電場の元で、半径 r の位置の電位は、 $\phi = \frac{q(r)}{4\pi\epsilon_0 r}$ であるから、ここに dq の電荷を持ってくるためのポテンシャル・エネルギー dU は、 $dU = \phi dq = \frac{q(r)}{4\pi\epsilon_0 r} dq$ である。 $dq = \left(\frac{dq}{dr}\right) dr = 4\pi r^2 \rho dr$ であることに注意して、全エネルギーは、

$$U = \int dU = \int \frac{q(r)}{4\pi\epsilon_0 r} dq = \int_0^a dr (4\pi r^2 \rho) \frac{\frac{4\pi r^3 \rho}{3}}{4\pi\epsilon_0 r} = \int dr \frac{4\pi \rho^2 r^4}{3\epsilon_0} = \frac{4\pi \rho^2 a^5}{15\epsilon_0}$$

と求まる。

(2) 電場のエネルギー:

次に、電場のエネルギーとして計算してみる。電場はガウスの法則を用いて、求めておく。電場は動径方向であるので、その大きさを E_r として、半径 r の球をガウスの閉曲面に選ぶと、ガウスの法則より、

$$4\pi r^2 E_r = \begin{cases} \frac{4\pi r^3 \rho}{3\epsilon_0} & \text{for } r < a \\ \frac{4\pi a^3 \rho}{3\epsilon_0} & \text{for } r > a \end{cases}, \implies E_r = \begin{cases} \frac{r\rho}{3\epsilon_0} & \text{for } r < a \\ \frac{a^3 \rho}{3\epsilon_0 r^2} & \text{for } r > a \end{cases}$$

¹⁸なぜ?

となる．これを用いて，全空間での電場のエネルギーは，

$$\begin{aligned} U &= \frac{\epsilon_0}{2} \int dV |\mathbf{E}|^2 = \frac{\epsilon_0}{2} \int_0^\infty 4\pi r^2 dr E_r^2 = \frac{\epsilon_0}{2} \left(\int_0^a 4\pi r^2 dr \left(\frac{r\rho}{3\epsilon_0} \right)^2 + \int_a^\infty 4\pi r^2 dr \left(\frac{a^3\rho}{3\epsilon_0 r^2} \right)^2 \right) \\ &= \frac{2\pi\rho^2}{9\epsilon_0} \left(\int_0^a dr r^4 + \int_a^\infty \frac{a^6}{r^2} \right) = \frac{2\pi\rho^2}{9\epsilon_0} \left(\frac{a^5}{5} + a^5 \right) = \frac{2 \cdot 6\pi\rho^2 a^5}{9 \cdot 5\epsilon_0} = \frac{4\pi\rho^2 a^5}{15\epsilon_0} \end{aligned}$$

となり，やはり同じ結果が得られる．

この電荷球の全電荷量を Q とおくと， $Q = \frac{4\pi a^3 \rho}{3}$ であるので，エネルギーは，

$$\rho = \frac{3Q}{4\pi a^3}, \quad \Rightarrow U = \frac{4\pi a^5}{15\epsilon_0} \left(\frac{3Q}{4\pi a^3} \right)^2 = \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 a}$$

と表すこともできる．

例えば原子核がこのように (正の電荷をもった陽子) 密度の一樣な球だと考えると，質量は半径の 3 乗に比例して大きくなるが，エネルギーは上の式より半径の 5 乗に比例してふれることになる．これは，原子番号を大きくするときに，質量よりも早く静電エネルギーが大きくなることを意味している．

1.4-8 [平板コンデンサーの静電エネルギー]:

これは 1.4-5 の (d) で答えているので省略する．この問題では電場は定数であるので，特殊な例になっている．

1.4-9 [導体球の静電エネルギー]:

電荷が q だけたまったときの電場の大きさ E は， $E_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ である．そこに δq だけ電荷を導体球に無限遠から移動するために必要な仕事 δU は，

$$\delta U = \delta q \int_\infty^a dr E_r = \frac{q\delta q}{4\pi\epsilon_0 a}$$

である．電荷を 0 から Q まで蓄える全仕事 U は，

$$U = \int_0^Q dU = \int_0^Q \frac{qdq}{4\pi\epsilon_0 a} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 a}$$

となる．

導体の静電エネルギーについて，もう少し議論しておくことにする．導体の電位 ϕ は導体内一定で，それは一般的に蓄えられた電荷量 Q に比例する．比例係数を静電容量 C と呼び， $Q = C\phi$ である．電荷が q 貯った状態での電位は $\phi' = q/C$ であり，そこからさらに微小電荷 dq を無限遠から運ぶために必要な仕事は $\phi' dq$ である．なぜなら，電位は単位電荷あたりの静電ポテンシャルであるので，電荷 dq の

ポテンシャルエネルギーは電位の dq 倍である．この操作を繰り返して，電荷量を 0 から Q まで蓄えたとすると，そのための全仕事は，

$$U = \int_0^Q dq\phi' = \int_0^Q dq \frac{q}{C} = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}Q\phi$$

となる．

導体球が電荷 Q を持つときの導体の電位は， $\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}$ であるから，そのときの静電エネルギーは，

$$U = \frac{1}{2}\phi Q = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 a}$$

である．

もちろん，電場のエネルギーからも同様に得られる．導体中には電場はなく，導体の外側には動径方向に大きさが $E_r = \frac{Q}{4\pi r^2}$ の電場が存在する．そこで，電場のエネルギーは，

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int |\mathbf{E}|^2 = \frac{\epsilon_0}{2} \int_a^\infty 4\pi r^2 dr \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \int_a^\infty dr \frac{1}{r^2} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 a}$$

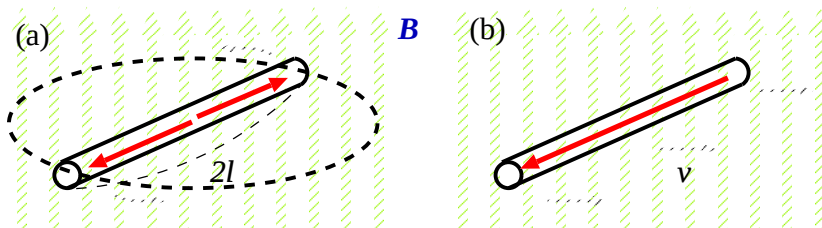
となる．

2 定常電流による磁場

2.1 ビオ・サバルの法則，アンペールの法則

2.1-1 [ローレンツ力]:

- (a) 一定の角速度だから，中心から x の位置での速度は $x\omega$ となる．ローレンツ力は $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ であるから，中心から両端方向¹⁹に大きさが $qx\omega B$ の力が働く．
- (b) これもローレンツ力が働くが，大きさは qvB である．方向は下図のとおりである．



¹⁹ベクトル積の方向を確認せよ．

- (c) ローレンツ力を受けた電荷は導線の端に移動する．その結果生じた電場によって qE と磁場による力とがつり合うまで電荷は移動する．(a) では $qE = qx\omega B$ であるから，電場 E は $E = x\omega B$ であり，中心と両端の電位差は，

$$\phi = \int_{\text{中心}}^{\text{端}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{x} = \int_0^l dx x \omega B = \frac{l^2 \omega B}{2}$$

である．また，(b) では，電場は $E = vB$ であり，電位差は $2lvB$ である．

2.1-2 [直線電流の作る磁場]:

この問題の趣旨は，2つの電流にはそれぞれ力が働くこととその力はビオーサバールの法則とローレンツ力の二段階で理解できることの確認である．

- (a) まず電流が磁場を作り，その磁場を次の電流がローレンツ力を介して感じるという順番で話しを進める²⁰．この最初の設問では一本の電流の作る磁場をまず求める．磁場の方向は，右ネジを巻く方向で，その大きさはアンペールの法則を使って求めることができる．電流に垂直な面上に半径 r の円に沿った磁場の線積分を考えると，その成分 B_ϕ は，

$$\int_{\text{円 } r} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{x} = 2\pi r B_\phi = \mu_0 I_1, \rightarrow B_\phi = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$$

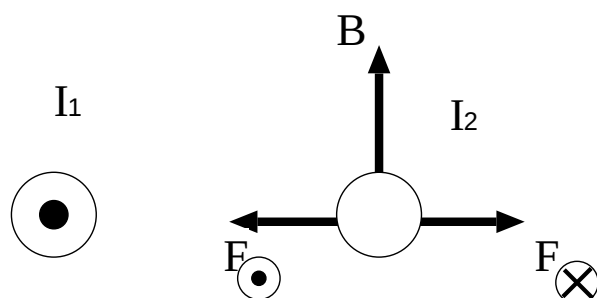
と求まる．

- (b) さて，電流 I_1 の磁場を I_2 が感じる力はローレンツ力で与えられる．

磁場 $\mathbf{B}$ 中に電流 (動いている電荷) $I d\mathbf{x} (= q\mathbf{v})$ が受ける単位長さ当たりのローレンツ力は $d\mathbf{F} = I d\mathbf{x} \times \mathbf{B}$ となり，この問題の場合その大きさは

$$dF_{21} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 dx}{2\pi r}$$

となる．また，左図のように，その向きは I_2 が I_1 と平行の場合は引力に，反平行の場合は斥力になる．この力が作用反作用の法則に従っていることは，逆のプロセスを順に考えて，同じ大きさの逆向きの力が働いていることを示せばよい．確かにそうになっているであろう．



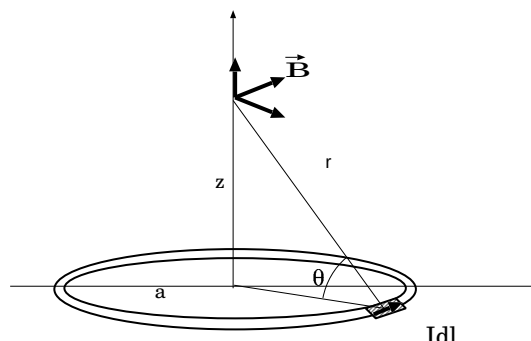
二本の電流を上から見た図． $\mathbf{B}$ は電流 I_1 が作った磁場である．

²⁰ これは，クーロンの法則から電場の導入した議論と似ている．二つの電荷があったときに，まず一番目の電荷が電場を作り，二番目の電荷がその電場を感じる．さて，引力や斥力のような力の方向は，電荷の負号で決まっていたが，電流の場合はどうだろうか？

(c) さて、平行と反平行の間はどうなるだろうか。 I_1 と I_2 が直角に並べると、 $\mathbf{B}$ と $\mathbf{I}_2$ が平行になってしまうので、力は働かない。この実験事実はアンペールによって発見され、アンペール力²¹とも呼ばれている。

2.1-3 [円電流による磁場]:

半径 a の円電流 I が中心軸上にて円の中心から z の距離にあるに作る磁場を求める (一般の位置での磁場を求めるのはちょっと難しい。できなくはない。)。対称性から、軸上における $\mathbf{B}$ の方向は z 軸方向になる。 z 軸に垂直方向は円の軸対称の位置の電流要素が作る磁場と完全にキャンセルする。右図のように、電流要素から観測位置へのベクトルと環状電流の流れている面との角度を θ とし、磁場の z 軸方向の成分を B_z とすると、



$$\begin{aligned} B_z &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{Idl}{r^3} r \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos\theta \\ &\downarrow (\cos\theta = a/r) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{aIdl}{r^3} = \frac{aI\mu_0}{4\pi r^3} \int dl = \frac{\mu_0 Ia^2}{2r^3} = \frac{\mu_0 Ia^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

となる。ここで $r = (a^2 + z^2)^{1/2}$ である。

実は、もう少し計算を進めると、この環状電流の作る磁場が電気双極子モーメント (1.1-8 参照) の作る電場と同じであることが分かる。ここではその一端に振れることにする。環状電流のつくる面積は、 $S = \pi a^2$ であり、 $a \ll z$ の条件では、

$$\begin{aligned} B_z &\simeq \frac{\mu_0 IS}{2\pi z^3} \\ \mu_0 &\leftrightarrow \frac{1}{\epsilon_0} \\ \mathbf{m} = \frac{S}{2} \mathbf{e}_z = \frac{\pi a^2 I}{2} &\leftrightarrow \mathbf{p} = 2aq \mathbf{e}_z. \end{aligned}$$

環状電流と磁気双極子 (小さい磁石) はそれら作る磁場が同じという意味で等価である。電気双極子の場合に正負の電荷が別々に考えられたのと同様に、磁石の素がこの環状電流だとすれば、N 極と S 極はバラバラには取り出せない (気がする)。

2.1-4 [直線電流の間に働く力 (ビオ＝サバールの法則+ローレンツ力)]:

(a), (b) は 2.1-2 と共通であり、そちらを参照のこと。

²¹ たくさんの力が出てきて、混乱の元かも知れないが、これは歴史的な経緯を述べていると考えて欲しい。あくまでも、現代的にはビオ＝サバールの法則による磁場とローレンツ力による解釈が一般的である。

ただし、2.1-2では、直線電流の作る磁場をアンペールの法則を用いて求めた。ここでは、ビオ＝サバールの法則から求めてみることにする。

直線電流を z 軸上にとることにする。無限に長い直線電流を考えることで z 方向の依存性はないので、 $z = 0$ の面上の位置 $(a, 0, 0)$ での磁場を求める。

磁場の方向は y 方向であり、右図に示すように、ある電流要素 Idz に対して、 $|Id\mathbf{x} \times \mathbf{r}| = Idzr \sin \theta$ であることに注意して、その電流要素が作る磁場の大きさ(y 成分) dB_y は、

$$dB_y = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{r \sin \theta}{r^3} dz$$

である。ここで、 $r = (z^2 + a^2)^{1/2}$, $\tan \theta = a/z$ である。

電流要素は $-\infty$ から ∞ までであるので、それについて積分すればよいが、その代わりに角度 θ について、 0 から π まで積分する方が簡単である。

$$r = \frac{a}{\sin \theta}, \quad z = \frac{a}{\tan \theta}, \quad |dz| = \frac{a}{\sin^2 \theta} d\theta$$

より、求める磁場 B_y は、

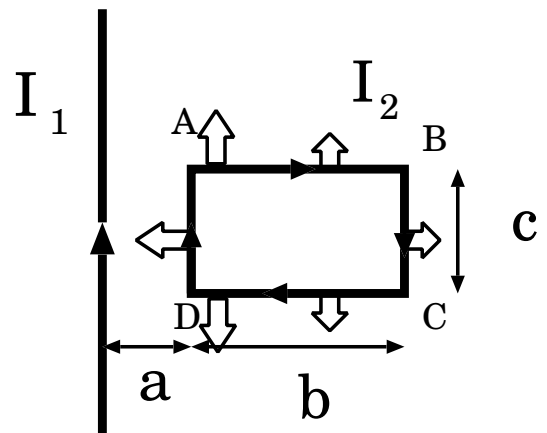
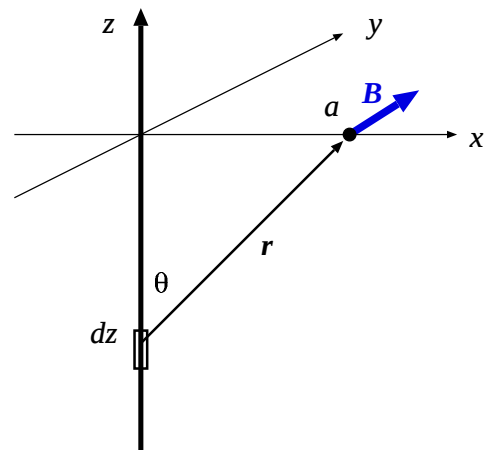
$$B_y = \int dB_y = \int_0^\pi \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\sin^2 \theta}{a^2} \sin \theta \frac{a}{\sin^2 \theta} d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_0^\pi \sin \theta d\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

となる。

(c) 問題文ではループ電流は正方形となっていたが、図では長方形であった。ここでは長方形だと考えて考えてみる。

まずは無限に長い電流 I_1 が矩形電流に及ぼす力を考察する。 I_1 が作る磁場は既に前問で求めているので、矩形電流のそれぞれの部分に対して、どのような力が働くかを考える。まず、 I_1 に垂直な平行な線分ABとCD部分について考える。右図からもわかるとおり、その2つの線分に働く力は互いに逆向きで、かつ直線電流 I_1 から同じ距離にあるので、同じ大きさである。結果として、2つの線分に働く力の合力はゼロになる。

次に平行線分DAとBCについて考えると、それぞれに働く力は、斥力の方向を正として、



矩形電流の各部分に対する力の方向を矢印(白抜)で記す。矢印の長さが力の大きさを(気持ちで)表している。

$$F_{DA} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2 c}{2\pi a}, \quad F_{BC} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 c}{2\pi(a+b)}$$

となる。それらの合力は引力であり、その大きさ F_{tot} は、

$$F_{\text{tot}} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 c}{2\pi} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+b} \right)$$

となる。

その逆はどうなるか。つまり、直線電流が矩形電流から受ける力である。この力はやはり作用反作用の法則に従っていて、合力としては上式と同じである。これを直接確かめるのはちょっと難しい。

2.1-5 [アンペールの法則]:

ビオ・サバールの法則で与えられる磁場 $\mathbf{B}$ は、 $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$ を満たす²²。ここで $\mathbf{J}$ は電流密度を表す。ある任意の閉曲線に沿って、磁場の線積分を考えると、ストークスの定理を用いることで、

$$\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{x} = \int dS \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0 \int dS \mathbf{n} \cdot \mathbf{J} = \mu_0 I$$

が分かる。 I は閉曲面で囲まれた面で定義される電流である。これをアンペールの法則という。任意の閉曲線に沿って磁場の積分がそこを貫く電流に等しいことを表している。

2.1-6 [円柱電流の作る磁場]:

2.1-2 の導線の太さが a になった問題である。磁場の方向は同じく、電流の向き対して右ねじを巻く向きである。磁場の大きさはアンペールの法則を用いて求める。電流に垂直な面に電流の中心と同心の半径 r の円をアンペールの閉曲線に選ぶ。その円上での磁場の大きさは不変であり、その大きさを B_ϕ とすると、アンペールの法則の左辺は、 $\int d\mathbf{x} \cdot \mathbf{B} = 2\pi r B_\phi$ である。

右辺には注意が必要である。円柱には一様な電流が流れているので、その電流密度は $J = I/\pi a^2$ である。右辺は、 r と a の大小関係で場合分けをして、

$$\mu_0 \int dS \mathbf{n} \cdot \mathbf{J} = \begin{cases} \mu_0 I & \text{for } r > a \\ \mu_0 \frac{I}{\pi a^2} \pi r^2 = \mu_0 \frac{I r^2}{a^2} & \text{for } r \leq a \end{cases}$$

となる。ここから、

$$B_\phi = \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} & (\text{円柱の外側}) \\ \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} & (\text{円柱の内側}) \end{cases}$$

となる。円柱の外側では直線電流の結果と同じとなる²³。

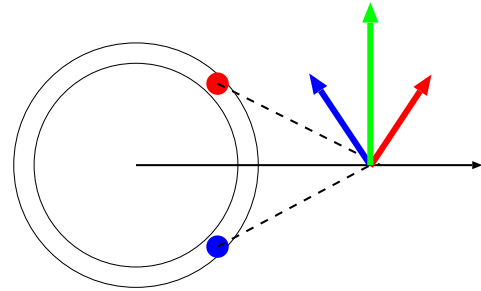
²² 講義ではこの計算を示したが、ここでは省略する。

²³ どこかで見た結果である。

2.1-7 [アンペールの法則の応用例]:

この問題の趣旨はアンペールの法則の応用である．何から何が示されるかを，すき間がないように議論して欲しい．

ビオーサバールの法則から，各電流要素から作られる磁場の z 成分はない．よって，電流に垂直な成分しかないが，一方で，右図にあるように動径成分は電流の密度の対称性からキャンセルされる．つまり，磁場は回転成分 B_ϕ しかないことがわかる．しかも，その大きさは原点からの距離だけに依存している．この議論は円筒の外側だけでなく，内側でも成り立つ．その成分を求めるためにアンペールの法則を用いる．



電流分布を真上から見た図．電流分布のある要素がつくる磁場とその電流要素と線対称の位置にある電流要素の作る磁場を重ね合わせると，動径成分はキャンセルする．

アンペールの法則の積分形は，適当な閉曲面に対して

$$\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{x} = \mu_0 \int_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{J}$$

となる．閉曲線として，円筒と同心の半径 r の円を考える²⁴．左辺は， $2\pi r B_\phi$ となり，一方で右辺は r の大きさに依存して決まる．

$$\text{右辺} = \begin{cases} 0 & \text{for } r < a \\ \mu_0 I & \text{for } r \geq a \end{cases}$$

ここで，全電流を I とした．まとめると，磁場は右ねじが回る方向であり，その大きさは，

$$B_\phi = \begin{cases} 0 & \text{for } r < a \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r} & \text{for } r \geq a \end{cases}$$

となる．

2.1-8 [同軸ケーブル]:

- (a) 2.1-??と同様に考えて，アンペールの法則を当てはめる．磁場は右ねじの方向を正として，その大きさを B_ϕ とすると，半径 r のアンペールの閉曲線を考える．内側の円柱には表面にのみ電流が流れていると仮定するので， $r < a$

²⁴そうすれば，線積分の線要素との内積は回転成分 B_ϕ だけ考えればよくて，しかも，それは円の半径だけに依存するので，積分は簡単にできる．

には電流は流れていないことに注意すると、アンペールの法則から

$$2\pi r B_\phi = \begin{cases} 0 & \text{for } r < a \\ \mu_0 I & \text{for } a \leq r < b \\ 0 & \text{for } b \leq r \end{cases}$$

を得る．よって，内側と外側の導体の間にだけ磁場 $B_\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ が右ねじの方向にある．

(b) 問題図の斜線部分の面を貫く磁場 (磁束) Φ は，どこでも面に垂直なので，

$$\Phi = \int dS \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = \int_a^b dr \int_0^l dz B_\phi = l \int_a^b dr \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \log \left(\frac{b}{a} \right).$$

となる．

(c) 自己インダクタンス L は電流 I が自分の閉回路を貫く磁場 (磁束) Φ との比例関係の係数を表す．この問題で自己インダクタンスは，

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \log \left(\frac{b}{a} \right).$$

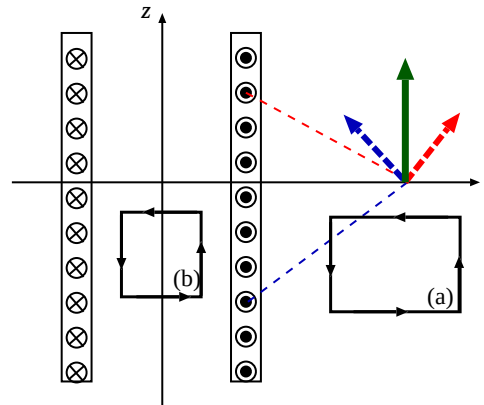
である．

(d) この問題は，???.0-??で解説する．

2.1-9 [ソレノイドコイル]:

簡単のために無限に長いコイルを考えることにする．無限に長いコイルのときには，磁場は z 軸の位置には依存しない．ちょうど $z = 0$ の面上の位置を考えても一般性を失わない．右図のように， $z = 0$ のある位置に対して， z 座標が $+z$ ， $-z$ にあるソレノイドコイルの2つ電流に作る磁場を考える．ビオ・サバールの法則から二つの磁場の大きさは等しく，方向は図に示してある．この二つの磁場ベクトルの合成は $+z$ 方向を向いていることがわかる．つまり， z 座標の任意の位置 $+z$ を流れる電流には必ず対応する座標 $-z$ にある電流が存在し，それが磁場の z 方向以外の成分をキャンセルすることがわかる．

この議論はコイルの内側か外側かに関係がないので，このコイルの作る磁場は必ず z 成分しかないことがわかる．



(a) 図のようにコイルの外側に矩形の閉曲線 (a) を考える．磁場の方向は z 方向しかないので，その大きさを B_z とする． z 軸に垂直な線分に対しては， $d\mathbf{x} \cdot \mathbf{B} = 0$

である．矩形の z 方向の長さを l として，この閉曲線にアンペールの法則を当てはめると，

$$\int d\mathbf{x} \cdot \mathbf{B} = l \left(B_z^{(\text{右})} - B_z^{(\text{左})} \right) = 0$$

となる．ここで右辺がゼロになるのは，閉曲面を貫く電流がゼロであるためである．ここから $B_z^{(\text{右})} = B_z^{(\text{左})}$ である．閉曲線は平行移動しても同じ結果が得られることから，コイルの外部では B_z は位置に依らないことがわかる．また，一方で，ビオ・サバールの法則より無限遠での磁場がゼロであることから，コイルの外部ではどこでもゼロであることがわかる．

- (b) 上の議論から磁場の方向は z 方向である．
- (c) 図のようにコイルの間に閉曲面 (b) を考える．閉回路が電流を囲まない限り，上の (a) での議論は同様に成り立つ．よって，磁場の向きは z 方向であり，コイル内部の場所には依存しない．
- (d) コイルをまたぐように，閉回路を考える．外側の磁場はゼロであることはわかっているので，アンペールの法則から，

$$\int d\mathbf{x} \cdot \mathbf{B} = l B_z = \mu_0 n I$$

より， $B_z = \mu_0 n I$ となる．

- (e) コイルに流れる電流は，平行に同じ向きに流れている電流の集まりだから，お互いに引力が働いている．これは縮む方向である．

これらはコイルの半径には全く依らない結果であった．

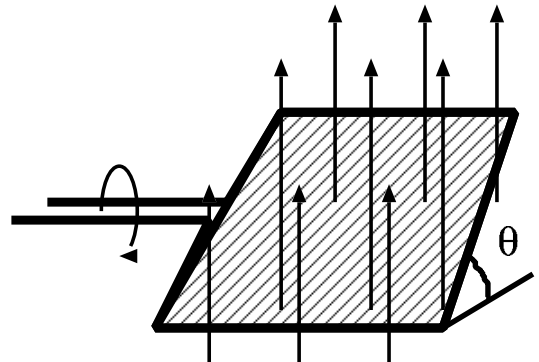
3 電磁誘導と Maxwell 方程式

3.0-1 [交流誘導起電力]:

起電力は回路に一周にわたる電場の線積分で与えられる．電磁誘導による起電力 V は，ファラデーの法則より $V = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{x} = -\frac{d}{dt}\Phi$ である．磁場と閉回路の法線とのなす角を θ のとき，磁束 Φ は， $\Phi = BS \cos \theta$ で表される．一定の角速度 ω で回転しているときは $\theta(t) = \omega t$ となるから，誘導起電力 V は，

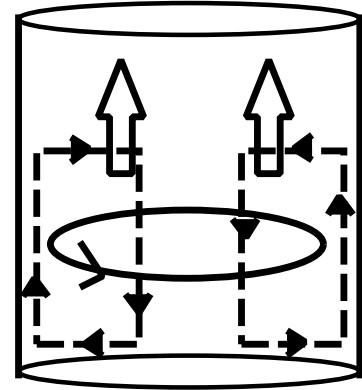
$$V = \omega B S \sin(\omega t)$$

となる．これが交流発電機の原理である．一様な磁場中を閉回路を回転させると，周期的な起電力が発生できる．



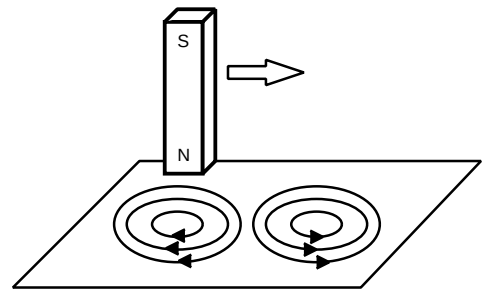
3.0-2 [電磁誘導と表面電流]:

円柱の内部を一様に流れていた電流が、一様に増幅したとする。このとき、円柱内部の磁場は右ねじを巻く方向の増える。この磁場の変化に対して電磁誘導が起こり、このとき磁場の増加を妨げるように右図の点線の向きに誘導起電力が生じる。結果として、円柱の中心部分よりも、表面の方に多くの電流が流れることになる。これは表皮効果と呼ばれる。例えば、交流電流を導線に流すとき、常に電流が振動変化しているので、この効果は顕著に現れる。



3.0-3 [うず電流]:

磁石を動かしたときの、導体板を貫く磁場の変化について考えてみる。磁石を動かすことによって、動かす前のN極の直下では減少し、動かす先では磁場が増えます。電磁誘導の法則から、それぞれに変化を妨げる方向に誘導起電力が生じ、右図のように渦状に電流が流れます。これは渦電流と呼ばれています。



この渦電流が流れているときに、その電荷運動が磁石による磁場から受ける力を考える。ちょうど磁石が通過するところの誘導電流は図の奥から手前に流れている。この電流は磁場から磁石の運動と同じ方向にローレンツ力を受ける。磁石にはその反作用とし、磁石の運動と反対向き、つまり運動を妨げる方向に動く。あるいは、誘導電流の等価磁石を考えると、図の左側ではS極が上に、右ではN極が上になっているので、やはり磁石の運動を妨げる力が働いていることは理解できる。

この導体に働く力はアラゴの円盤と呼ばれる実験に相当している。アラゴの円盤とは、動かさないときには力が働かない、つまり磁性のない銅やアルミの円盤の上を、磁石を動かすと、その磁石に引かれて運動をはじめる現象である。最近では、廃品回収でアルミ缶を分別する方法にこの考え方が使われている。スチール缶は磁石にくっつくのでまず分別し、磁石にくっつかないアルミ缶は磁場中に(例えば)落下させる等の運動をさせて、電磁誘導を利用した力によって分別させる。また、電磁調理器は渦電流を利用している典型例である。

3.0-4 [変位電流]:

コンデンサーに蓄えられた面電荷密度を σ とすると、平板導体間の電場の大きさ E は、 $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ である。平板間の変位電流 I_d は、平板と平行な面を貫く(変位)電

流密度として考え,

$$I_d = \int dS \mathbf{n} \cdot \mathbf{J}_d = \int dS \mathbf{n} \cdot \left(\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = \frac{d}{dt} \int dS \sigma = \frac{d}{dt} (\sigma S)$$

である. コンデンサーに蓄えられて電荷は σS であるから, その時間変化は電流に相当する. つまり, このコンデンサー間には電流が流れていないが, 相当する変位電流が流れていることになる.

3.0-5 [アンペール・マクスウェルの法則]:

静磁場でのアンペールの法則 ($\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$) の両辺に $\nabla \cdot$ を作用し, 連続の方程式 ($\partial \rho(\mathbf{x}, t) / \partial t = -\nabla \cdot \mathbf{J}$) より,

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{J} = \mu_0 \left(-\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)$$

となる. 左辺は恒等的にゼロになるが, 右辺では $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ となり, 定常電流のときに対応している. 一般に, 非定常状態のときには左辺のみがゼロになり, この等式は成り立たない.

そこで, ガウスの法則が非定常状態でも成り立つとして, $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0$ の両辺を t で微分すれば,

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{E}) = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial t} \rho = -\frac{1}{\epsilon_0} \nabla \cdot \mathbf{J}$$

より,

$$\nabla \cdot \left(\mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = 0$$

となる. これを用いて, アンペールの法則を非定常状態へ拡張すると,

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$$

が得られる. 右辺の第二項を変位電流密度と呼ぶ. もちろん, 定常状態では $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0$ であり, アンペールの法則に戻る.