

科目名 統計熱力学		教官名 福島 孝治	2月3日4時限 試験時間 90分
問題用紙 1枚	解答用紙 両面 1枚	—	持ち込みの有無 筆記用具のみ持ち込み可

以下の問いに答えよ。但し、解答の順序は問わない。

問1. カノニカル分布についての以下の問いに答えよ。簡単のために、系のミクロな状態  $i$  は離散的に数えられるものとする。カノニカル分布の取扱いでは、エネルギーが  $E_i$  であるミクロな状態  $i$  が温度  $T$  において実現する確率  $p_i$  は、

$$p_i = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{E_i}{k_B T}\right)$$

となる。ここで、 $k_B$  はボルツマン定数である。また、規格化定数  $Z$  は、

$$Z = \sum_i \exp(-E_i/k_B T)$$

であり、分配関数という。

1. エネルギーの期待値 (平均値)  $\langle E \rangle$  を分配関数を用いて表せ。
2. エネルギーのゆらぎと定積比熱  $C = d\langle E \rangle / dT$  の関係を示せ。
3. 前問の関係式を用いて、マクロな系でのエネルギーの観測量がほぼ確実にこのエネルギーの期待値になっていることを論じよ。
4. エネルギー  $E$  をもつミクロな状態数を  $W(E)$  とする。系のエネルギーがある値  $E$  である確率  $P(E)$  を  $W(E)$  を用いて表せ。
5. 前問の式を用いて、最も確率が大きいエネルギー (最も確からしいエネルギー) が存在する条件を示せ。また、この条件式の意味を説明せよ。

問2. 次のキーワードの中から一つを選び、統計力学的な説明を与えよ。

1. エネルギー等分配則
2. 理想気体の状態方程式
3. エントロピー
4. 化学ポテンシャル

問 3. 格子点に固定された  $N$  個の粒子が温度  $T$  の熱浴に接している系がある．それぞれの粒子のエネルギーは， $-\epsilon$  または  $+\epsilon$  のどちらかの値をとるものとする．この系の統計力学的性質をカノニカル分布によって取扱い，以下の問いに答えよ．

1. 格子点  $i$  の粒子のエネルギーを  $\epsilon_i$  とする．この変数を用いて全粒子のエネルギーを示せ．
2. この系の分配関数を求めよ．
3. ヘルムホルツの自由エネルギーを求めよ．
4. エネルギーの期待値の温度依存性を求め，グラフにその概略を示せ．
5. エントロピーの温度依存性を求め，グラフにその概略を示せ．
6. 高温極限と低温極限で実現しているミクロな状態をそれぞれ説明せよ．また，そのときのエントロピーの振舞いについて，その意味を議論せよ．
7. 比熱の温度依存性を求め，その概略をグラフに示せ．
8. ミクロな法則からマクロな性質を導くことが統計力学の目的であるが，その利点をこの問題を例に説明せよ．

問 4. 講義に対する意見・感想を自由に述べよ．