–not so frequently asked question(2005.11.04)–

次の恒等式が成り立つ:

$$\sum_{M_1=0}^{\infty} \frac{(M_1+N-1)!}{M_1!(N-1)!} y^{M_1} = (1-y)^{-N}$$

答えを知っていてずるい気もするが，文字どおりこの式が成り立つことを示す[6]．まず，右辺の式を Taylor 展開すると，

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{m=0}^{\infty} x^m \tag{3}$$

であることがわかる[7]．このことから，示すべきは

$$\sum_{M_1=0}^{\infty} \frac{(M_1+N-1)!}{M_1!(N-1)!} y^{M_1} = \left(\sum_{m=0}^{\infty} y^m\right)^N \tag{4}$$

となるが，これは数学的帰納法で示せる．$N=1$ のとき，自明に成立するので，式 (4) を用いて，$N+1$ の式を導けばよい．

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{m=0}^{\infty} y^m\right)^{N+1} &= \left(\sum_{m_1=0}^{\infty} y^{m_1}\right)^N \left(\sum_{m_2=0}^{\infty} y^{m_2}\right) = \left(\sum_{M_1=0}^{\infty} \frac{(M_1+N-1)!}{M_1!(N-1)!} y^{M_1}\right)\left(\sum_{M_2=0}^{\infty} y^{M_2}\right) \\
&= \sum_{M_1=0}^{\infty}\sum_{M_2=0}^{\infty} \frac{(M_1+N-1)!}{M_1!(N-1)!} y^{M_1+M_2} \\
&= \sum_{M=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{M} \frac{(m+N-1)!}{m!(N-1)!}\right) y^M \\
&\downarrow \left[\sum_{m=0}^{M} \frac{(m+N-1)!}{m!(N-1)!} = \frac{(M+N)!}{M!N!} \text{であることに注意をすると,}^{8}\right] \\
&= \sum_{M=0}^{\infty} \frac{(M+N)!}{M!N!} y^M
\end{aligned}$$

よって，上の恒等式は成立することが示された．

---

[6] もっとエレガントな解答を求む．

[7] Taylor 展開の公式に代入して，確かめよ．

[8] これは順番に足して行けば示せるし，意味は，最初の一人が x 個持っていて，残りの $M-x$ 個のおはじきを N 人で分割する場合の数を x について和をとっているので，結局 M 個のおはじきを $N+1$ 人で分割する場合の数に等しいという式である．