m は非負整数，$0 < y < 1$ とする．
$S(m) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+m}{m} y^k$ とおく．ただし $\binom{k+m}{m} = \frac{(k+m)!}{k!m!}$ である．
このとき，$S(m) = \frac{1}{(1-y)^{m+1}}$ となる．

証明:
一般に次の等式が成り立つ．

$$\binom{n}{r} = \binom{n+1}{r+1} - \binom{n}{r+1}$$

ただし $n = r$ のときは $\binom{n}{r+1} = 0$ とすれば上の式は成り立つ．
　これを使えば $S(m)$ は次のように書き換わる．

$$\begin{aligned}
S(m) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\binom{k+m+1}{m+1} - \binom{k+m}{m+1} \right] y^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+m+1}{m+1} y^k - \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+m}{m+1} y^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+m+1}{m+1} y^k - \sum_{k=1}^{\infty} \binom{k+m}{m+1} y^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+m+1}{m+1} y^k - y \sum_{k=1}^{\infty} \binom{k+m}{m+1} y^{k-1} \\
&= S(m+1) - yS(m+1)
\end{aligned}$$

したがって

$$S(m+1) = \frac{1}{1-y} S(m)$$

また簡単に分かるように

$$S(0) = \sum_{k=0}^{\infty} y^k = \frac{1}{1-y}$$

であるから，結局 $S(m)$ は求める形となる．