練習問題の解答例集

福島 孝治 (東京大学大学院総合文化研究科)

平成 17 年 11 月 11 日: Ver. 1

練習問題1

1-1

表と裏の確率は同じなので，全ての可能性のうちに表が n 枚出る場合の数の割合が求める確率 $P_N(n)$ である:

$$P_N(n) = \frac{{}_NC_n}{2^N} = \frac{N!}{(N-n)!n!}\frac{1}{2^N} \tag{1.1}$$

1-2

$N \gg 1$ として，スターリングの公式 $\log(N!) \simeq N\log N - N$ より，

$$\begin{aligned}
\log(P_N(n)) &= -N\log 2 + \log N! - \log((N-n)!) - \log n! \\
&\simeq -N\log 2 + N\log N - N - (N-n)\log(N-n) + (N-n) - n\log n + n \\
&= -N\log 2 + N\log N - (N-n)\log(N-n) - n\log n
\end{aligned} \tag{1.2}$$

ここで，尤もらしい条件は，$\dfrac{d\log P_N(n)}{dn} = 0$ である．

$$\frac{d\log P_N(n)}{dn} = \log(N-n) - (N-n)\frac{-1}{N-n} - \log n - 1 = \log\left(\frac{N-n}{n}\right)$$

よって，尤もらしい n^* は $\dfrac{N-n^*}{n^*} = 1$ より，$\boxed{n^* = \dfrac{N}{2}}$

1-3

問題では $P_N(n)$ をテイラー展開で二次まで求めよとなっているが，ここでは $\log P_N(n)$ を展開する．

$$\begin{aligned}
\log P_N(n) &= \log P_N(n^*) + \frac{1}{2!}\frac{d^2}{dn^2}\log P_N(n)\Big|_{n=n^*}(n-n^*)^2 + O((n-n^*)^3) \\
&\downarrow \quad \frac{d^2}{dn^2}\log P_N(n) = \frac{d}{dn}\log\left(\frac{N-n}{n}\right) = \frac{-1}{N-n} - \frac{1}{n} \\
&\simeq \log P_N(N/2) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{N-N/2} + \frac{1}{N/2}\right)(n-n^*)^2 \\
&= -\frac{2}{N}(n-N/2)^2 + \text{const.}
\end{aligned}$$

よって，定数 C を用いて，

$$P_N(n) = C\exp\left(-\frac{2}{N}\left(n - \frac{N}{2}\right)^2\right) \tag{1.3}$$

となる．これはガウス関数である．

1-4

(a) 元の積分変数 (x, y) から極座標

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta + \beta \\ r\sin\theta + \beta \end{pmatrix}, \quad dxdy = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} drd\theta = rdrd\theta$$

に変数変換する．積分領域は，$r=[0:\infty],\theta=[0:2\pi]$

$$I^2 \;=\; \int_0^\infty\int_0^{2\pi} rdrd\theta \exp\left(-\alpha r^2\right) = 2\pi\int_0^\infty rdre^{-\alpha r^2} = 2\pi\left(-\frac{1}{2\alpha}e^{-\alpha r^2}\right)\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{\alpha}$$

よって，$\boxed{I=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}}$

(b)

$$\frac{d}{d\alpha}I \;=\; \frac{d}{d\alpha}\int_{-\infty}^\infty e^{-\alpha(x-\beta)^2}dx = -\int(x-\beta)^2e^{-\alpha(x-\beta)^2}dx$$

左辺は前問の結果から直接微分して元め，右辺については奇関数の積分がゼロになることに注意すると，

$$-\frac{1}{2}\pi^{1/2}\alpha^{-3/2} \;=\; -\int dxx^2e^{-\alpha(x-\beta)^2}-\beta^2\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

より，$\boxed{\int dxx^2e^{-\alpha(x-\beta)^2}=\left(\frac{1}{2\alpha}-\beta^2\right)\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}}$

<u>**1-5**</u>

規格化定数は，$C\int P_N(n)dn=1$ より決まる．前問の答えより，積分領域が正であることに注意すると，$C\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2/N}}=1$ より，$C=2\sqrt{\frac{2}{N\pi}}$ となり，

$$P_N(n)=2\sqrt{\frac{2}{N\pi}}\exp\left(-\frac{2}{N}(n-N/2)^2\right)$$

である．

<u>**1-6**</u> モーメントの計算

期待値と分散 $(\langle n^2\rangle-\langle n\rangle^2)$ はそれぞれ，

$$\langle n\rangle \;=\; \int dnnP_N(n)=\frac{N}{2} \tag{1.4}$$

$$\langle n^2\rangle-\langle n\rangle^2 \;=\; \int dnn^2P_N(n)-\frac{N^2}{4}=(\frac{N}{4}+\frac{N^2}{4})-\frac{N^2}{4}=\frac{N}{4} \tag{1.5}$$

となる．

<u>**1-7**</u> 実際の実験の検証．

スターリングの公式を使って，ガウス分布を出したが，それがどの程度の N からよく合っているのかを見てみたいということや，期待値とその分散によるゆらぎの効果が N とともにどうなっているのかを見たいというのが，題意である．

<u>**おまけ**</u>

この問題の確率分布 (1.1) は二項分布と呼ばれている．N を大きくないとしたときの平均値を見ておこう．平均値の計算には母関数を使うのが便利である．ここで母関数 $Q(z)$ を

$$Q(z)\equiv\sum_n z^nP_N(n)=\sum_n z^n\frac{N!}{(N-n)!n!}\frac{1}{2^N}=\frac{1}{2^N}(1+z)^N$$

と定義する．この母関数を用いると，平均値は

$$
\begin{aligned}
\langle n \rangle &= \sum_n n P_N(n) = \sum_n \frac{d}{dz} z^n P_N(n) \bigg|_{z=1} = \frac{d}{dz} Q(z=1) = \frac{N}{2} \\
\langle n^2 \rangle &= \sum_n n^2 P_N(n) = \sum_n \left(\frac{d^2}{dz^2} + \frac{d}{dz} \right) z^n P_N(n) \bigg|_{z=1} = \left(\frac{d^2}{dz^2} + \frac{d}{dz} \right) Q(z=1) = \frac{N(N-1)}{4} + \frac{N}{2}
\end{aligned}
$$

となり，N が大きいとしたときの評価と同じになっている．

練習問題2

2-1

　気体粒子は体積 V の容器の中で一様に存在しているとしているので，ある選ばれた粒子が領域 v に存在する確率は v/V である．それが n あるということは，領域の外に $N-n$ 個存在することになる．また，粒子の選び方は，${}_NC_n$ であることに注意すると，確率分布は,

$$
P_N(n) = {}_NC_n \left(\frac{v}{V} \right)^n \left(1 - \frac{v}{V} \right)^{N-n}
$$

となる．

2-2 母関数として，$Q(z) = \sum_n z^n P_N(n)$ を定義すると，

$$
Q(z) = \sum_n {}_NC_n z^n \left(\frac{v}{V} \right)^n \left(1 - \frac{v}{V} \right)^{N-n} = \left(1 - \frac{v}{V} + \frac{v}{V} z \right)^N
$$

である．平均値 $\overline{n}$ は,

$$
\overline{n} = \sum_n n P_N(n) = \frac{d}{dz} Q(z=1) = \frac{v}{V} N
$$

となり，分散は,

$$
\begin{aligned}
\overline{n^2} - \overline{n}^2 &= \left(\frac{d^2}{dz^2} + \frac{d}{dz} \right) Q(z=1) - \left(\frac{vN}{V} \right)^2 = \left(\frac{v}{V} \right)^2 N(N-1) + \frac{v}{V} N - \left(\frac{vN}{V} \right)^2 \\
&= N \left(\frac{v}{V} \right) \left(1 - \frac{v}{V} \right) = \overline{n} \left(1 - \frac{v}{V} \right) \qquad (2.1)
\end{aligned}
$$

2-3 N, V は十分大きいとするので，$1/N$, $1/V$ は微小量である．ここでは，これらの微小量の２次の量は小さいとして無視をすることにする．

$$
\begin{aligned}
P_N(n) &= \frac{N!}{n!(N-n)!} \left(\frac{v}{N} \right)^n \left(1 - \frac{v}{V} \right)^{N-n} \\
&\downarrow \ \text{スターリングの公式より}, \log N! = N \log N - N \\
&\downarrow \ \left[N! \simeq N^N e^{-N}, \ \ (N-n)! \simeq (N-n)^{N-n} e^{-(N-n)} \right] \\
&\simeq \frac{1}{n!} \frac{N^N}{(N-n)^{N-n}} e^{-n} \left(\frac{v}{N} \right)^n \left(1 - \frac{v}{V} \right)^{N-n} = \frac{e^{-n}}{n!} \left(\frac{Nv}{V} \right)^n \left\{ \frac{N}{N-n} \left(1 - \frac{v}{V} \right) \right\}^{N-n}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\downarrow \quad \left[\overline{n} = \frac{vN}{V}, \quad \right] \\
&\simeq \quad \frac{e^{-n}}{n!}\overline{n}^n \left(1 + \frac{n}{N} - \frac{v}{V}\right)^{N-n} = \frac{e^{-n}}{n!}\overline{n}^n \exp\left((N-n)\log\left(1 + \frac{n}{N} - \frac{v}{V}\right)\right) \\
&\downarrow \quad \left[(N-n)\log\left(1 + \frac{n}{N} - \frac{v}{V}\right) \simeq (N-n)\left(\frac{n}{N} - \frac{v}{V}\right) \simeq n - \frac{vN}{V} = n - \overline{n}\right] \\
&\simeq \quad \frac{e^{-n}}{n!}\overline{n}^n \exp(n - \overline{n}) = \frac{\overline{n}^n}{n!}e^{-\overline{n}} \qquad (2.2)
\end{aligned}
$$

この確率分布は規格化条件も満たしている;

$$
\sum_{n=0}^{\infty} P_N(n) = \sum_n \frac{\overline{n}^n}{n!}e^{-\overline{n}} = 1
$$

<u>別解</u>：この結果は母関数 $Q(z)$ の極限からも求めることができる.

$$
\begin{aligned}
Q(z) &= \left(1 - \frac{v}{V} + \frac{v}{V}z\right)^N = \left(1 - (1-z)\frac{v}{V}\right) = \exp\left\{N\log\left(1 - (1-z)\frac{v}{V}\right)\right\} \\
&\simeq \exp\left\{-\frac{Nv}{V}(1-z)\right\} = e^{-\overline{n}(1-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\overline{n}}\frac{\overline{n}^n}{n!}z^n = \sum_{n=0}^{\infty} P_N(n)z^n
\end{aligned}
$$

定義の式と比較すれば，式 (2.2) が得られる.

<u>2-4</u> $n, \overline{n}$ が十分大きいとして，$P_N(n)$ は

$$
\log P_N(n) = n\log\overline{n} - \overline{n} - \log n! \simeq n\log\overline{n} - \overline{n} - n\log n + n
$$

尤もらしい値 n^* は，極値の条件 $\dfrac{d\log P_N(n)}{dn} = \log\bar(n) - \log n = 0$ より, $n^* = \overline{n}$ であることがわかる．その周りでテーラー展開すると,

$$
\log P_N(n) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{n}\right)\bigg|_{n=n*}(n - n^*)^2 + \cdots
$$

となり,

$$
P_N(n) \simeq \exp\left(-\frac{(n-\overline{n})^2}{2\overline{n}}\right)
$$

とガウス分布になることがわかる．**2-2** で求めた分散は，N, V が大きい極限で $\overline{n}$ になることがわかり，確かに分散が半値幅になっていることが確認できる.

練習問題 3

これは一般の高次元球の体積を求める問題．多重積分の練習問題である.
半径 R の d 次元球の体積 V_d は,

$$
V_d = \int\cdots\int_{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_d^2\le R^2} dx_1 dx_2 \cdots dx_n \qquad (3.1)
$$

STEP1:(極座標表示) d 次元球座標 $(r,\theta_1,\cdots,\theta_{d-2},\phi)$ を

$$\begin{aligned}
x_1 &= r\cos\theta_1 \\
x_2 &= r\sin\theta_1\cos\theta_2 \\
&\vdots \\
x_{d-2} &= r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{d-3}\cos\theta_{d-2} \\
x_{d-1} &= r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{d-3}\sin\theta_{d-2}\cos\phi \\
x_d &= r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{d-3}\sin\theta_{d-2}\sin\phi
\end{aligned}$$

で定義する．積分領域を $D_d(R)$ をとすると，それは変数 $(r,\theta_1,\cdots\theta_{d-2},\phi)$ では,

$$\begin{aligned}
D_d(R) &= \{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^d \mid |\boldsymbol{x}|^2 = x_1^2+x_2^2+\cdots+x_d^2 \le R^2\} \\
&= \{r,\theta_1,\cdots,\theta_{d-2},\phi | 0\le r\le R, 0\le\theta_1,\cdots,\theta_{d-2}\le\pi, 0\le\phi\le 2\pi\}
\end{aligned}$$

と表される．

STEP2. (変数変換のヤコビ行列式) この変数変換のヤコビ行列式を求めるのは面倒なので，新しい変数 $(y_1,y_2,\cdots,y_d)$ を以下のように導入する．

$$\begin{aligned}
y_1 &= \sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_d^2} \\
y_i &= x_{i-1} \qquad\qquad (i=2,\cdots,d)
\end{aligned}$$

変数 $(x_1,x_2,\cdots,x_d)$ から変数 $(y_1,y_2,\cdots,y_d)$ への変数変換は，$x_{i-1}=y_i(i=2,d)$ であり，$x_d^2 = y_1^2-(x_1^2+\cdots+x_{d-1}^2) = y_1^2-(y_2^2+\cdots+y_d^2)$ であることに気づけばよい．この変数変換のヤコビ行列式は,

$$\frac{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_d)}{\partial(y_1,y_2,\cdots,y_d)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & & & \\ & & & 0 & 1 \\ \frac{\partial x_d}{\partial y_1} & .. & .. & .. & .. \end{vmatrix} = (-)^{1+d}\frac{y_1}{x_d} = (-)^{1+d}\frac{1}{\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{d-2}\sin\phi}$$

である．本当に求めたいのは極座標への変数変換である．そのヤコビ行列式は,

$$\frac{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_d)}{\partial(r,\theta_1,\cdots,\theta_{d-2},\phi)} = \frac{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_d)}{\partial(y_1,y_2,\cdots,y_d)}\frac{\partial(y_1,y_2,\cdots,y_d)}{\partial(r,\theta_1,\cdots,\theta_{d-2},\phi)}$$

であるが,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(y_1,y_2,\cdots,y_d)}{\partial(r,\theta_1,\cdots,\theta_{d-2},\phi)} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & .. & .. & 0 \\ \star & -r\sin\theta_1 & 0 & & \\ \star & & & & \\ \star & .. & .. & .. & -r\sin\theta_1\cdots\sin\phi \end{vmatrix} \\
&= (-)^{d-1}r^{d-1}\sin^{d-1}\theta_1\sin^{d-2}\theta_2\cdots\sin\phi
\end{aligned}$$

であるので，まとめると，

$$\frac{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_d)}{\partial(r,\theta_1,\cdots,\theta_{d-2},\phi)} = r^{d-1}\sin^{d-2}\theta_1\sin^{d-3}\theta_2\cdots\sin\theta_{d-2} \tag{3.2}$$

STEP3:(積分) ここで実際に積分してみると，

$$\begin{aligned} V_d(R) &= \int drd\theta_1\cdots\theta_{d-2}d\phi r^{d-1}\sin^{d-2}\theta_1\sin^{d-3}\theta_2\cdots\sin\theta_{d-2} \\ &= 2\pi\frac{R^d}{d}\left(\int d\theta_1\sin^{d-2}\theta_1\right)\left(\int d\theta_2\sin^{d-3}\theta_2\right)\cdots\left(\int d\theta_{d-2}\sin\theta_{d-2}\right) \\ &= 2\pi\frac{R^d}{d}I(d-2,0)I(d-3,0)\cdots I(1,0) \end{aligned} \tag{3.3}$$

最後の式で，$I(m,n)$ を

$$I(m,n) = \int_0^\pi \sin^m x\cos^n xdx$$

と定義する．ここで m,n は非負の整数とする．この $I(m,n)$ が求まればよい．

STEP4:(積分の評価) この関数 $I(m,n)$ は $\cos x$ で積分することで，次の漸加式が成り立つことがわかる：

$$I(m,n) = \frac{m-1}{m+n}I(m-2,n) \tag{3.4}$$

これを解けば，

$$I(m,0) = \frac{(m-1)!!}{m!!}I(0,0) = \frac{(m-1)!!}{m!!}\pi \quad \text{for even } m$$

$$I(m,0) = \frac{(m-1)!!}{m!!}I(1,0) = \frac{(m-1)!!}{m!!}2 \quad \text{for odd } m$$

まとめると，d が偶数の時には，

$$V_d(R) = 2\pi\frac{R^d}{d}\frac{(d-3)!!}{(d-2)!!}\frac{(d-4)!!}{(d-3)!!}\cdots 1\pi^{\frac{d-2}{2}}2^{\frac{d-2}{2}} = \frac{R^d}{d}\sqrt{\pi}^d\sqrt{2}^d\frac{1}{(d-2)!!} = \frac{R^d\sqrt{2\pi}^d}{d!!} \tag{3.5}$$

ここで，記号 $n!! = n(n-2)(n-4)\cdots 2$ を用いた．最後の形は，Γ 関数を使って，$V_d(R) = \frac{(R\sqrt{\pi})^d}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}$ と表すことも出来て，この場合は奇数の時にも成り立つ式になっている．表面積は R で微分して，$S_d(R) = d\frac{R^{d-1}\sqrt{\pi}^d}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}$ である[1]．

この結果はもっと簡単に求めることもできる．

[1]確かに，d=3 では，$V = \frac{R^3\pi^{3/2}}{\Gamma(5/2)} = \frac{4\pi R^3}{3}$ となっている．