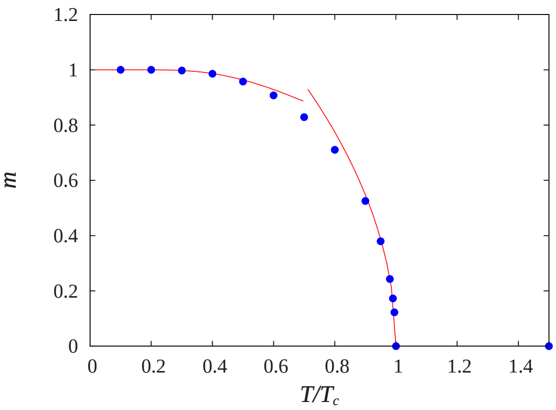


図 10: 点は m の決定方程式を数値的に解いた結果．二本の線はそれぞれ，低温極限の振舞い (2.46) と転移温度近傍での振舞い (2.47) の式を表している．

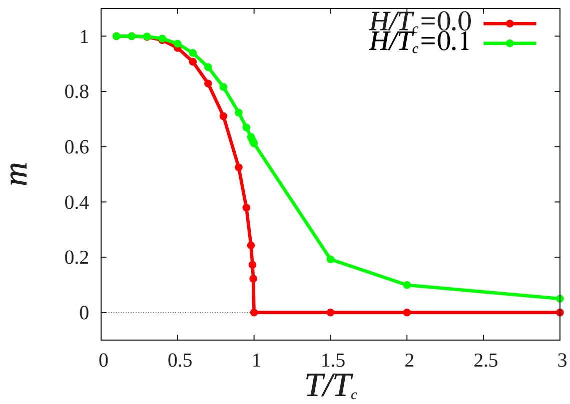


図 11: $H=0.$ と $H=0.1$ の平均磁化の温度依存性．磁場があることで，相転移が消えていることがわかる．

おまけ 上で求めた平均磁化の温度依存性の結果をグラフに描いてみた．
　また，磁場がある場合の M の決定方程式 (2.48) を反復方程式として解いてみる．

問題 3-8 磁場中イジングモデル：

(1) これは問題 3-7(7) で示した．
(2) 磁場があるときの "自由エネルギー" $F(m)$ は，

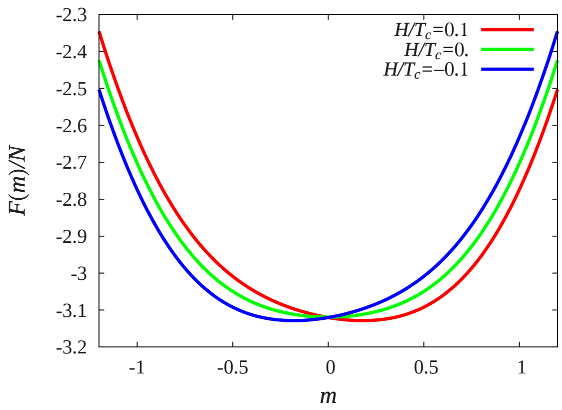
$$F(m) = N\frac{Jzm^2}{2} - \frac{N}{\beta}\log\left(2\cosh\beta(Jzm+H)\right)$$

である．一階の微係数は，

$$\frac{\partial}{\partial m}F(m) = NJz(m - \tanh\beta(Jzm+H))$$

であり，これがゼロになる条件が m の決定方程式になっている．また，二階の微係数は，

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial m^2}F(m) &= NJz\left(1-\frac{\beta Jz}{\cosh^2\beta(Jzm+H)}\right)\\ &= NJz\left[(1-\beta Jz)+\beta Jz\tanh^2\beta(Jzm+H)\right]\end{aligned} \quad (2.53)$$



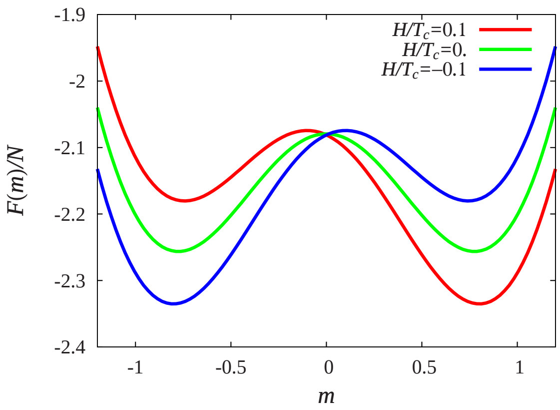


図 12: **(左)**$T > T_c$ のときの "自由エネルギー" の m 依存性．磁場の値は $H/T_c = 0.1, 0, -0.1$ の 3 つの場合が示されている．自由エネルギーの最小は一つしか無く，最小の m の値は H の減少にともない，正から負に連続的に移動している．**(右)**$T < T_c$ のときの "自由エネルギー" の極小値は 2 つあり，その m の値は H の減少にともない，正から負に移動しており，$H = 0$ のときに不連続になっている．

となる．この式から，$1 - \beta Jz \geq 0$ のとき，すなわち，ゼロ磁場での転移温度を $T_c = Jz$ とすると，$T \geq Tc$ のときは，$\frac{\partial^2}{\partial m^2}F(m) \geq 0$ であり，ひとつだけ極小値をもつことがわかる．磁場を正から負に変えたときも，唯一の最小値が H とともに変化するだけである．

一方で，$T < T_c$ の場合には，2 つの極小があり，H と同じ方向の m の値が自由エネルギーの最小になる．そこで，H の符号を正から負に変えると，その m の値は $H = 0$ のところで不連続になる．概略図は，図 12 に示した．

(3) M の決定方程式を反復方程式として解いた結果は，問題 3-7 の図 11 に示した．

問題 3-11 グランドカノニカル分布：

(1) 注目する系と熱浴 (粒子浴) からなる孤立系を考える．この系の全エネルギーは E_T，粒子数は N_T とする．等重率の原理を仮定すると，注目する系がエネルギー E_j，粒子数 N_j であるミクロな状態 j が実現する確率 P_j は，

$$P_j \propto W_{II}(E_T - E_j, N_T - N_j)$$

である．ここで，$W_{II}(E, N)$ は熱浴がエネルギー E，粒子数 N を持つミクロな状態の場合の数である．注目する系のエネルギー及び粒子数は多くないとする，つまり，$E_T \gg E_j, N_T \gg N_j$ とする．このとき，ある定数を C として，確率 P_j は，

$$\begin{aligned}
P_j &= \log W_{II}(E_T - E_j, N_T - N_j) + C \\
&\simeq \frac{\partial}{\partial E_{II}} \log W_{II}(E_T - E_j, N_T - N_j)\Big|_{E_{II}=E_T} (E_{II} - E_T) \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial N_{II}} \log W_{II}(E_T - E_j, N_T - N_j)\Big|_{N_{II}=N_T} (N_{II} - N_T) + C'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\downarrow \ \text{エントロピー，化学ポテンシャルの定義と，平衡の条件より}\\ &= -\frac{1}{k_BT}E_j+\frac{\mu}{k_BT}N_j=-\beta\left(E_j-\mu N_j\right)\end{aligned} \tag{2.54}$$

となる．ここで，β は $1/k_BT$ である．規格化因子も含めて表すと，

$$P_j=\frac{1}{\Xi}\exp\left(-\beta(E_j-\mu N_j)\right),\quad \Xi=\sum_j e^{(-\beta(E_j-\mu N_j))} \tag{2.55}$$

である．

(2) まず，圧力 P とグランドポテンシャルの関係を調べておく．圧力の統計力学的な定義から，

$$\begin{aligned}P &= -\left\langle\frac{\partial E}{\partial V}\right\rangle=-\sum_i\frac{\partial E_i}{\partial V}\frac{e^{-\beta(E_i-\mu N_i)}}{\Xi}=\frac{1}{\Xi}\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial V}\sum_i e^{-\beta(E_i-\mu N_i)}=k_BT\frac{\frac{\partial\Xi}{\partial V}}{\Xi}\\ &= k_BT\frac{\partial}{\partial V}\log\Xi=-\frac{\partial}{\partial V}A\end{aligned} \tag{2.56}$$

であることがわかる．問題文より，グランドポテンシャル A は示量的であることから，示量性の条件式の両辺を α で微分すると，

$$\begin{aligned}A(T,\alpha V,\mu)=\alpha A(T,V,\mu)\ \ \rightarrow\ \ &\frac{\partial}{\partial\alpha}A(T,\alpha V,\mu)=A(T,V,\mu)\\ &V\frac{\partial}{\partial\alpha V}A(T,\alpha V,\mu)=A(T,V,\mu)\end{aligned} \tag{2.57}$$

となる．$\alpha=1$ とすれば，$\frac{\partial}{\partial V}A(T,V,\mu)=A(T,V,\mu)/V$ となり，(2.56) より，

$$PV=-A$$

が示される．

(3) 粒子数の平均値は，

$$\langle N\rangle=\frac{1}{\Xi}\sum_i N_iZ(N)e^{\beta\mu N_i}=\frac{1}{\Xi}\sum\frac{\partial}{\partial\beta\mu}Z(N)^{\beta\mu N_i}=\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial\mu}\log\Xi \tag{2.58}$$

であり，同様に粒子数の二乗平均値は，

$$\langle N^2\rangle=\frac{1}{\Xi}\sum_i N_i^2Z(N)e^{\beta\mu N_i}=\frac{1}{\Xi}\frac{\partial^2}{\partial\mu^2}\Xi \tag{2.59}$$

である．ここで粒子数の二乗ゆらぎを密度 $\rho=\langle N\rangle/V$ の関数として求めてみる．

$$\begin{aligned}\left\langle(N-\langle N\rangle)^2\right\rangle &= \langle N^2\rangle-\langle N\rangle^2=\frac{1}{\Xi\beta^2}\frac{\partial^2}{\partial\mu^2}\Xi-\left(\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial\mu}\log\Xi\right)^2\\ &= \frac{1}{\beta^2}\left[\frac{\Xi''}{\Xi}-\left(\frac{\Xi'}{\Xi}\right)^2\right]=\frac{1}{\beta^2}\left[\frac{\Xi''\Xi-\Xi'2}{\Xi^2}\right]=\frac{1}{\beta^2}\left[\frac{\Xi'}{\Xi}\right]'\\ &= \frac{1}{\beta^2}\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\frac{1}{\Xi}\frac{\partial\Xi}{\partial\mu}\right)=\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial\mu}\langle N\rangle=k_BT\frac{\partial}{\partial\mu}\frac{\langle N\rangle}{V}V\frac{\langle N\rangle}{\langle N\rangle}\\ &= \frac{k_BT\langle N\rangle}{\rho}\frac{\partial}{\partial\mu}\rho\end{aligned} \tag{2.60}$$

(4) 平均密度 ρ は粒子数 N に比例して大きくなる量ではないことから，式 (2.60) は粒子数の揺らぎが $\sqrt{\langle N\rangle}$ に比例していることがわかる．これは平均値と比較すると，

$$\frac{\sqrt{\langle (N-\langle N\rangle)^2\rangle}}{\langle N\rangle} \propto \frac{1}{\sqrt{\langle N\rangle}}$$

であり，マクロな系では微小な量であると言える．ここから，粒子数の平均値からのずれは，マクロな系ではほぼ実現しないことがわかる．

問題 3-12 理想気体のグランドカノニカル分布の取扱い：

ここでは理想気体の問題をグランドカノニカル分布の考え方で扱ってみる．
(1) 一粒子系の分配関数 Z_1 は，

$$Z_1 = \frac{1}{h^3}\int d^3x \int d^3p \exp\left(-\beta \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}\right) = \frac{V}{h^3}(2\pi k_B T m)^{3/2}$$

である．二粒子系の分配関数 Z_2 は，粒子の不可分性を考慮して，

$$Z_2 = \frac{1}{2!}Z_1^2$$

である．これから，大分配関数は，

$$\Xi = \sum_{N=0}^{\infty} Z_N e^{\beta\mu N} = \sum_N \left[\frac{V(2\pi k_B T m)^{3/2}}{h^3}e^{\beta\mu}\right]^N \frac{1}{N!} = \exp\left[\frac{V(2\pi k_B T m)^{3/2}}{h^3}e^{\beta\mu}\right] \tag{2.61}$$

となる
(2) グランドポテンシャルは，

$$A = -k_B T\log\Xi = -k_B T\left[\frac{V(2\pi k_B T m)^{3/2}}{h^3}e^{\beta\mu}\right] \tag{2.62}$$

となる．
(3) 粒子数の平均値は，

$$\langle N\rangle \;=\; \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial\mu}\log\Xi = \frac{1}{\beta}\beta\left[\frac{V(2\pi k_B T m)^{3/2}}{h^3}e^{\beta\mu}\right] = \left[\frac{V(2\pi k_B T m)^{3/2}}{h^3}e^{\beta\mu}\right] \tag{2.63}$$

となる．この式から化学ポテンシャルと粒子数の関係

$$\mu = k_B T\left[\log\frac{\langle N\rangle}{V} - \frac{3}{2}\left(\frac{2\pi k_B T m}{h^2}\right)\right] = k_B T\log\frac{\langle N\rangle}{V} - \mu_0(T) \tag{2.64}$$

を表しており、粒子密度に依存する第一項と温度だけで決まる第二項に分けられる．この式はまた，グランドポテンシャルを用いて，

$$\langle N\rangle = -\frac{A}{k_B T} \tag{2.65}$$

とも表すことができる．
(4) 状態方程式を求めるために，圧力を求めておく．定義より，

$$P = k_BT\frac{\partial}{\partial V}\log\Xi = k_BT\left[\frac{(2\pi k_BTm)^{3/2}}{h^3}e^{\beta\mu}\right] = k_BT\frac{\langle N\rangle}{V} \tag{2.66}$$

となる．これから，$PV = \langle N\rangle k_BT$ が求まる．これは前問の (4) の議論をすれば，カノニカル分布による結果と同じである．

また，理想気体のグランドポテンシャル (2.62) が示量的であることから，前問 (2) と式 (2.65) より，$PV = -A = \langle N\rangle k_BT$ がすぐに導ける．
(5) エントロピーを求めてみる．

$$\begin{aligned}
S &= -\frac{\partial}{\partial T}A = k_B\log\Xi + k_BT\frac{\partial}{\partial T}\log\Xi \\
&\downarrow \left(\frac{\partial}{\partial T}\log\Xi = \frac{3}{2T}\log\Xi + \left(-\frac{\mu}{k_BT^2}\right)\log\Xi\right) \\
&= \frac{5k_B}{2}\log\Xi - \frac{\mu}{T}\log\Xi = \frac{5}{2}\langle N\rangle k_B + \langle N\rangle k_B\left[\log\frac{V}{\langle N\rangle}\left(\frac{2\pi k_BTm}{h^2}\right)^{3/2}\right] \\
&= \langle N\rangle k_B\left[\log\left(\frac{V}{\langle N\rangle}\left(\frac{2\pi k_BTm}{h^2}\right)^{3/2}\right) + \frac{5}{2}\right]
\end{aligned} \tag{2.67}$$

これは，カノニカル分布による結果と一致している．

問題 3-13 重力中の理想気体のグランドカノニカル分布での取扱い：

ここでは重力ポテンシャル中の理想気体の問題をグランドカノニカル分布の考え方で扱ってみる．
(1) 高さ z の位置にいる N 粒子系の分配関数は，

$$Z_N = \frac{1}{N!}\left[\frac{V}{h^3}(2\pi k_BTm)^{3/2}\right]^N \exp(-N\beta mgz)$$

である．
(2) 大分配関数は，

$$\Xi = \sum_{N=0}^{\infty} Z_N e^{\beta\mu N} = \exp\left[\frac{V}{h^3}(2\pi k_BTm)^{3/2}e^{-\beta mgz+\beta\mu}\right] \tag{2.68}$$

であるので，粒子数の平均値と化学ポテンシャルの関係は，

$$\begin{aligned}
\langle N\rangle &= \frac{\partial}{\partial\beta\mu}\log\Xi = \frac{V}{h^3}(2\pi k_BTm)^{3/2}e^{-\beta mgz+\beta\mu} \\
\beta\mu &= \beta mgz + \log\left[\frac{\langle N\rangle}{V}\left(\frac{2\pi k_BTm}{h^2}\right)^{-3/2}\right]
\end{aligned} \tag{2.69}$$

と求まる[21].
(3) 粒子数のやりとりがある系の平衡条件は「化学ポテンシャルが一定」である．今の問題では，それぞれの高さでの化学ポテンシャルが丁度つり合っているのである．圧力 $P(z)$ は状態方程式 $PV = \langle N \rangle k_B T$ に従うので，式 (2.69) より，

$$
\begin{aligned}
\mu &= mgz + k_B T \log \left[\frac{P(z)}{k_B T} \left(\frac{2\pi k_B T m}{h^2} \right)^{-3/2} \right] = mgz + k_B T \log P(z) + \text{z indep. term} \\
&\Longrightarrow mgz + k_B T \log P(z) = \text{定数}
\end{aligned}
$$

となり，

$$
P(z) \propto \exp\left(-\frac{mgz}{k_B T} \right) \tag{2.70}
$$

が求まる．

問題 3-14 表面吸着の問題：

吸着する分子は変動するので，グランドカノニカル分布を用いて考える．まず、N_1 個の分子が吸着されている状態の分配関数を求める．全体の吸着のエネルギーは $-N_1\epsilon$ であり，その吸着の仕方は，N 個の吸着点から N_1 個を選ぶ場合の数だけある．結果として，分配関数 Z_{N_1} は，

$$
Z_{N_1} = {}_N C_{N_1} \exp(\beta N_1 \epsilon) = \frac{N!}{N_1!(N-N_1)!} e^{\beta N_1 \epsilon}
$$

となる．この系の大分配関数は,

$$
\Xi = \sum_{N_1=0}^{N} Z_{N_1} e^{\beta \mu N_1} = \sum \frac{N!}{N_1!(N-N_1)!} \left(e^{\beta(\mu+\epsilon)} \right)^{N_1} = \left(1 + e^{\beta(\mu+\epsilon)} \right)^N
$$

である．吸着分子数の期待値を求めると,

$$
\langle N_1 \rangle = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \mu} \log \Xi = N \frac{e^{\beta(\mu+\epsilon)}}{1 + e^{\beta(\mu+\epsilon)}} \tag{2.71}
$$

である．求めたい被覆比は,

$$
\theta = \frac{\langle N_1 \rangle}{N} = \frac{e^{\beta(\mu+\epsilon)}}{1 + e^{\beta(\mu+\epsilon)}} \tag{2.72}
$$

となる．

もう少し考察を続けてみる．吸着分子が理想気体だとすると，その化学ポテンシャルは圧力 P で表せる．

$$
e^{\beta\mu} = \frac{P}{k_B T} \left(\frac{h^2}{2\pi k_B T m} \right)^{3/2}
$$

[21] 別解として，化学ポテンシャルとヘルムホルツの自由エネルギーの関係を使っても良い．$\mu = \frac{\partial}{\partial N} F_N$ からも同じ答えが導ける．

この式を用いると、

$$\theta = \frac{1}{1+e^{-\beta(\mu+\epsilon)}} = \frac{P}{P_0(T)+P} \tag{2.73}$$

となることが分かる．ここで，$P_0(T) = \frac{k_BT}{e^{\beta\epsilon}}\left(\frac{h^2}{2\pi k_BTm}\right)^{-3/2}$ であり、温度のみに依存して圧力には寄らない．結局被覆比の圧力依存性は簡単な式にまとめることが出来る．この式は Langmuir の吸着式と呼ばれている．

問題 3-9 一次元格子上のイジングモデル：

ここでは一次元イジングモデルについて，正確に分配関数を計算して，相転移が起こらないことを見てみることにする．
(1) 分配関数を定義に基づいて書き下してみる．

$$\begin{aligned}
Z(T) &= \sum_{s_1=\pm1}\cdots\sum_{s_N=\pm1}\exp\left(\beta J\sum_i S_iS_{i+1} + \beta H\sum_i S_i\right) \\
&= \sum_{s_1=\pm1}\cdots\sum_{s_N=\pm1}\exp\left(\sum_i\left(\beta JS_iS_{i+1} + \beta\frac{H}{2}(S_i+S_{i+1})\right)\right) \\
&= \sum_{s_1=\pm1}\cdots\sum_{s_N=\pm1}\prod_i\exp\left(\beta JS_iS_{i+1} + \frac{\beta H}{2}(S_i+S_{i+1}\right) \\
&= \sum_{s_1=\pm1}\cdots\sum_{s_N=\pm1}\prod_i W(S_i,S_{i+1})
\end{aligned}$$

ただし，$S_{N+1} = S_1$ である．
(2) 行列 $\mathbf{W}$ の要素は，それぞれ $W(S,S')$ と次のような関係がある．

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} W(1,1) & W(1,-1) \\ W(-1,1) & W(-1,-1) \end{pmatrix}$$

この行列の積は,

$$\begin{aligned}
\mathbf{W}^2 &= \begin{pmatrix} W(1,1) & W(1,-1) \\ W(-1,1) & W(-1,-1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} W(1,1) & W(1,-1) \\ W(-1,1) & W(-1,-1) \end{pmatrix} \\
&= \sum_{S=\pm1}\begin{pmatrix} W(1,S)W(S,1) & W(1,S)W(S,-1)) \\ W(-1,S)W(S,1)) & W(-1,S)W(S,-1) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となり，これを繰り返すことで分配関数になることが示せる．

$$Z(T) = \sum_{S_1}\sum_{S_2}\cdots\sum_{S_N} W(S_1,S_2)W(S_2,S_3)\cdots W(S_N,S_1) = \mathrm{Tr}\mathbf{W}^N$$

(3) 行列 $\mathbf{W}$ を対角化する行列 $\mathbf{U}$ とする．$\mathbf{W}$ の固有値を $\lambda_\pm$, 2×2 の単位行列を $\mathbf{I}$ として,

$$\mathbf{WU} = \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix}\mathbf{U}, \quad \mathbf{U}^\dagger\mathbf{U} = \mathbf{UU}^\dagger = \mathbf{I}$$

と表せることに注意すると,

$$Z(T)=\mathrm{Tr}\left(\mathbf{W}^N\mathbf{U}\mathbf{U}^\dagger\right)=\mathrm{Tr}\left(\mathbf{U}^\dagger\mathbf{W}^N\mathbf{U}\right)=\mathrm{Tr}\begin{pmatrix}\lambda_+ & 0\\ 0 & \lambda_-\end{pmatrix}^N=\lambda_+^N+\lambda_-^N \tag{2.74}$$

であることが分かる．また，固有値方程式は,

$$(\lambda-e^{\beta(J+H)})(\lambda-e^{\beta(J-H)})-e^{-2\beta J}=0$$

$$\lambda^2-2e^{\beta J}\cosh(\beta H)\lambda+2\sinh\beta J=0$$

$$\begin{aligned}\lambda_\pm &= e^{\beta J}\cosh(\beta H)\pm\sqrt{e^{2\beta J}\cosh^2(\beta H)-2\sinh\beta J}\\ &= e^{\beta J}\cosh(\beta H)\pm\sqrt{e^{2\beta J}\sinh^2(\beta H)+e^{-2\beta J}}\end{aligned}$$

(4) N が十分大きいときには，自由エネルギーは,

$$-\beta F(T)=\log Z(T)\simeq N\log\lambda_+=N\log\left(e^{\beta J}\cosh(\beta H)+\sqrt{e^{2\beta J}\sinh^2(\beta H)+e^{-2\beta J}}\right)$$

であり，エネルギーは,

$$E=-\frac{\partial}{\partial\beta}\log Z=-N\frac{\partial}{\partial\beta}\log\lambda_+=-N\frac{\frac{\partial\lambda_+}{\partial\beta}}{\lambda} \tag{2.75}$$

を計算すればよい．ここでは簡単のため，磁場ゼロの条件で考えることにする．

$$\frac{\partial\lambda_+}{\partial\beta}=\frac{\partial}{\partial\beta}\left(e^{\beta J}+e^{-\beta J}\right)=2J\sinh\beta J$$

結局,

$$E(T)=-NJ\tanh\beta J$$

となる．磁化については，その後で磁化率を計算するために磁場がある条件で計算しなければいけない．磁化は、

$$M=\left\langle\sum_i S_i\right\rangle=\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial H}\log Z=\frac{N}{\beta}\frac{\partial}{\partial H}\log\lambda_+=\frac{N}{\beta\lambda_+}\frac{\partial\lambda_+}{\partial H}$$

で計算される．続きを計算すると,

$$\begin{aligned}M &= \cdots\\ &= \frac{\sin\beta H}{\sqrt{\sin^2\beta H+e^{-4\beta J}}}\end{aligned} \tag{2.76}$$

(5) 帯磁率も定義どおり計算すると,

$$\chi\equiv\lim_{H\to0}\frac{\partial M}{\partial H}=\beta Ne^{2\beta J}=N\frac{e^{\frac{2J}{k_BT}}}{k_BT} \tag{2.77}$$

低温極限では，キューリー則よりも強い指数関数的な発散になっている．ここに相互作用の効果が表れている．しかしながら，有限温度で帯磁率が発散することはない．これは絶対零度でのみ秩序化が起こっていることを意味している．

問題 3-10 全連結型イジングモデル：

ここでは，全連結型の模型を正確に取り扱うと，平均場近似と同じ答えがでることを示す．つまり，近似が正確になるモデルが存在するというわけである．このことから，全連結型の模型はたびたび平均場模型と呼ばれている．

(1) 例えば全ての S_i が 1 だとすると，$(\sum_i S_i)^2 = N^2$ であり，エネルギーの第一項が $O(N)$ になるためには係数は $1/N$ である必要がある．エネルギーが示量変数でない模型は熱力学的に異常である．

(2) 単純に右辺から左辺を導く[22]．

$$\text{右辺} \;=\; \sqrt{\frac{\tilde{N}}{2\pi}} \int dm \exp\left(-\tilde{N}(m-A)^2 + \tilde{N}A^2\right) = \exp(\tilde{N}A^2) = \text{左辺} \tag{2.78}$$

(3) $\tilde{N} = N\beta J$，$A = \sum_i S_i$ として，この式を用いると，分配関数は，

$$\begin{aligned}
Z &= \sum_{\{S_i\}} \exp\left(N\beta J\left(\frac{1}{N}\sum_i S_i\right)^2 + \beta H \sum_i S_i\right) \\
&= \left(\frac{N\beta J}{2\pi}\right)^{1/2} \int dm \sum_{\{S_i\}} \exp\left(-N\beta J m^2 + 2mN\beta J\left(\frac{1}{N}\sum_i S_i\right) + \beta H \sum_i S_i\right) \\
&= \left(\frac{N}{2\pi}\right)^{1/2} \int dm \sum_{\{S_i\}} \exp\left(-N\beta J m^2 + (2m\beta J + \beta H)\sum_i S_i\right) \\
&= \left(\frac{N}{2\pi}\right)^{1/2} \int dm e^{-N\beta J m^2} \exp\left(N \log\left(2\cosh(2m\beta J + \beta H)\right)\right) \\
&= \left(\frac{N}{2\pi}\right)^{1/2} \int dm \exp\left(-N\beta J m^2 + N \log\left(2\cosh(2m\beta J + \beta H)\right)\right)
\end{aligned}$$

と計算出来る．結局、求めたい $f(m)$ は，

$$f(m) = \beta J m^2 - \log\left(2\cosh\left(2m\beta J + \beta H\right)\right) \tag{2.79}$$

である．

(4) $f(m)$ の極値の条件は，

$$f'(m) = 2\beta J m - 2\beta J \tanh\left(\beta(2mJ + H)\right)$$

から，

$$m = \tanh\left(\beta(2mJ + H)\right)$$

である．

(5) 零磁場のときの上の方程式は，平均場近似のときの自己無憧着方程式と同じ構造を持っている．平均場のときは上の $2J$ が zJ になっていた．今の問題では，相互作用する手の数が $2N$ 本あり、それぞれが J/N の強さなので，zJ に相当する値は $2J$ である．相転移する議論は平均場近似のときと全く同じである．

[22] 問題の右辺の係数のルートの位置が間違っていました．