

熱力学 練習問題編

福島孝治 (東大院総合文化)

1 熱力学の基本:熱と熱量

1-1 [熱量 1]: 水の比熱はいくらか? 500g の水温度を 5K だけ上げるために必要な熱量は何 cal か?

1-2 [熱量 2]: 10 円硬貨はおよそ 12g であり, その主成分は銅である. この硬貨の温度が 5K 下がった. 硬貨から失われた熱量は何 cal か?ただし, 銅の比熱は 0.094cal/gK である.

1-3 [比熱の測定方法]: 質量 mg , 温度 $t\text{K}$ の水槽に質量 Mg , 温度 $T\text{K}$ の物体を入れて放置する. しばらくすると, 両者の温度は T' になった. 物体の比熱を求めよ. ただし, $t < T' < T$ であり, 水槽は断熱壁に囲んであり, 外部とに熱の出入りはないとする.

1-4 [熱の仕事当量]: 体重 60Kg の人が, 2 階の教室まで歩いて来た. そのときに必要な仕事は最低何 J か?それを熱量に換算すると何 cal になるか?また, それだけの熱量を水 200g に加えると, 水の温度は何 K 上がるか?

1-5 [偏微分の練習]: $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$ のとき、

(a) $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ を求めよ.

(b) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$ を示せ.

ただし, $x^2 + y^2 + z^2 \neq 0$ とする.

1-6 [偏微分 1]: $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ が関数 $f(x, y)$ の全微分であることと,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

であることが, 同値であることを示せ.

1-7 [偏微分 2]: $(3x^2 + 2xy - 2y^2)dx + (x^2 - 4xy)dy$ はある関数 $f(x, y)$ での全微分であることを示し, 関数 $f(x, y)$ を求めよ.

1-8 [偏微分 3]:次の関係式を証明せよ.

(a) $\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V + \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = 0$

(b) $\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V = 1$

$$(c) \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_V = -1$$

- 1-9 [理想気体の状態方程式]: 1 モルの理想気体の状態方程式は, 気体定数を R として, $PV = RT$ で与えられる. n モルの理想気体の状態方程式を求めよ.
- 1-10 [気体定数]: すべての気体の 1 モルは, $0^\circ C$, 1 気圧で $22.4l$ の体積を占める. ここから気体定数求めよ.
- 1-11 [気体の体積]: $10g$ の窒素の気体は $28^\circ C$, 2 気圧で体積はいくらか? 窒素の原子量は, $14 \times 2 = 28$ である.
- 1-12 [状態方程式]: 熱気球の飛ぶ条件を議論せよ.
- 1-13 [圧力-体積曲線]: ファン・デル・ワールス気体の 1 モルの状態方程式は,

$$\left(P + \frac{a}{V^2} \right) (V - b) = RT \quad (1)$$

である. ここで, a, b は物質に依存する正の定数である. 温度一定の条件での圧力と体積の関係を様子をグラフに示せ.

- 1-14 [van der Waals 気体の状態方程式]: ファン・デル・ワールス気体の n モルの状態方程式を求めよ.

2 熱力学第 1 法則

- 2-1 ある熱力学的状態から, 別の状態を経由して再び同じ最初の状態の戻ってくる過程をサイクルと呼ぶ. このサイクル過程で, 系が外部にする仕事を W , 系が受け取った熱量 Q 間には, $W = -Q$ の関係があることを説明せよ.
- 2-2 n モルの理想気体を温度一定 T のまま体積を V_A から V_B まで膨張させた. この間に気体のした仕事は?
- 2-3 圧力 P 一定のもとで, 気体が V_A から V_B まで膨張する間に気体のした仕事は?
- 2-4 n モルの実在気体の状態方程式は,

$$\frac{PV}{nRT} = 1 + B \left(\frac{N}{V} \right) + C \left(\frac{N}{V} \right)^2$$

と表される. 温度一定 T のまま体積を V_A から V_B まで膨張させる間に気体のした仕事は?

- 2-5 定圧比熱 C_p は, 式 $C_p = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_P + P \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$ で表されることを示せ.

2-6 理想気体の場合，マイヤーの関係式

$$C_p - C_v = R$$

が成り立つことを示せ．ここで R は気体定数である．

2-7 理想気体の断熱過程では PV^γ は一定であることを示せ．ただし， $\gamma = C_p/C_v$ である．

2-8 状態方程式が (1) に従う van der Waals 気体の内部エネルギーが $U = cT - \frac{a}{V}$ のとき，定積比熱 C_v および $C_p - C_v$ を求めよ．

2-9 熱力学関係式

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P$$

を用いて¹，状態方程式が $P = f(V)T$ の物質は内部エネルギーが体積に依らないことを示す．

2-10 次の関係式を示せ．前問の関係式を用いて，

$$C_p - C_v = \frac{TV\beta^2}{\kappa}$$

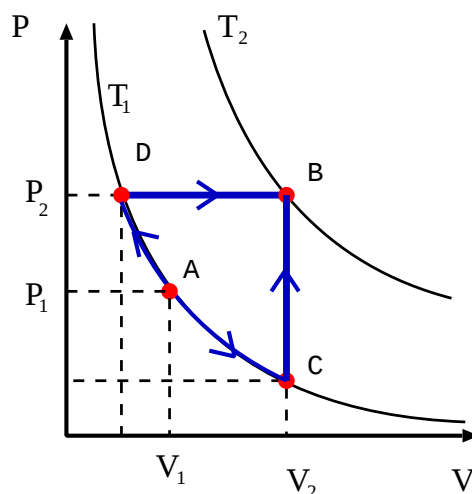
を示せ．ここで， $\beta = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$ は体積膨張率， $\kappa = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$ は等温圧縮率である．

2-11 一般に，定圧比熱は定積比熱よりも大きい．その理由を議論せよ．

2-12 $P = \frac{2}{3} \frac{U}{V}$ で，内部エネルギーが体積に依らず $U(T)$ である気体の状態方程式を求めよ．

2-13 理想気体の断熱曲線が等温曲線よりも傾きが急であることを示せ．すなわち，断熱曲線上に沿った $\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_{ad}$ が $\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T$ よりも大きいことを示そう．

2-14 図の矢印の過程で状態 $A(P_A, V_A, T_1)$ から状態 $B(P_B, V_B, T_2)$ へ理想気体の状態を変化させるとき，気体がした仕事と気体が受け取った熱量を，中間状態が C, D のそれぞれの場合について求めよ．ただし，状態 C, D は状態 A から等温過程で移行される．



¹後で証明する．

第一回熱力学レポート問題

福島孝治 (東京大学大学院総合文化研究科)

問題 1 「van der Waals 気体 1 : 練習問題 1-14 を答えよ .

問題 2 「van der Waals 気体 2 : 練習問題 2-14 の作業物質を理想気体ではなくて , van der Waals 気体に変えて答えよ .

問題 3 どれか一つ : 練習問題の中から 1 つ選んで答えよ . ただし , 上の問題は除く .

問題 4 「講義について」 : 講義に関する感想・意見・要望はないか? この講義に期待していることは何か?

レポート提出に際して

ルール :

- A4 レポート用紙で作成し , 枚数制限はしないが , 裏面は余白として残し , 片面にのみ記載されていること .
- レポートの冒頭に氏名と学籍番号 , それからレポート作成の時に一緒に悩んだ共同研究者名を明記のこと .
- 締め切りは 2 週間後 . 6 月 7 日
- 提出先は , 16 号館 221A 室 , あるいは講義終了時に .

レポート問題の返却 : 赤を入れて返します .

レポートは共同作業でもいいのかな ... よい . 普段から友人と議論して , 講義で分らなかったことを話をしたりするのは大変有意義なことなので , レポートもその範疇に入ると考える . レポートは試験では無いのだから , 何も一人ぼっちで悩むことはない . 沢山議論した結果を個人個人でうまくまとめて欲しい² .

レポートは手紙と同じ と思って , 提出する時には自分でよく読み直して , 意味が通っているかよく確認して欲しい . 他人が読むとすぐに混乱するようなレポートは困る . また , ありがちな混乱の原因として ,

「式で表すこと」と「絵で描いてみること」 中学生にもわかるように説明するには絵で描いてみせることが大事で、本当に理解できていると、式など使わずに絵で描けるはず。一方で、だれにも正確に情報を伝えるには数学で記述する必要がある。どちらも、大事だということ。レポート問題でも出てきた結果は一度はグラフや絵に描いてみるともっとよくわかることがある。

²ただし、他人のレポートを写してしまうことは、紙 (資源) の無駄、作成する時間や採点する時間の無駄であり、お互いの不幸しかもたらさないと心得よ。「悩むことなく作成されたレポート」などほとんど何の役にも立たない。