熱力学 練習解答 編

福島孝治 (東大院総合文化)

1 熱力学の基本:熱と熱量

1–1 [**熱量 1**]:

$$500 \times 5 \times 1 = 2500\mathrm{cal}$$

風呂を沸かそうとするとそれなりの熱量が必要である.

1–2 [**熱量 2**]: 比熱は温度に依存しないとすると，失われた熱量は

$$0.094 \times 5 \times 12 = 5.64\mathrm{cal}$$

である．銅の比熱は水と比べると一桁小さい．暖まりやすくて冷めやすいのである.

1–3 [**比熱の測定方法**]: 断熱壁で囲まれているので，物体から出ていった熱量と水が受け取った熱量が等しい．水と物体のそれぞれ $C_{水}, C_{物体}$ とすると，

$$m\int_{T'}^{t} C_{水}(T)dT = M\int_{T}^{T'} C_{物体}(T)dT$$

簡単のために比熱は温度に依存しないとき，あるいは温度変化が微小のときは,特に

$$C_{物体} = \frac{m}{M}\frac{(T'-t')C_{水}}{T-T'}$$

となる.

1–4 [**熱の仕事当量**]:

この教室までに階段を登ってくる仕事を考えてみる．高さは大体 10m 位だろうか.登ってくるまでには最低必要な仕事は，$60[\mathrm{Kg}] \times 9.8[\mathrm{m/sec}^2] \times 10[\mathrm{m}] \simeq 5880[\mathrm{J}] \simeq 1.4 \times 10^3\mathrm{cal}$[1] である．その仕事を全て水に注ぐと，$1.4 \times 10^3/200 = 7.0[\mathrm{K}]$ となる.体の中の水が 200g ぐらいでなくてよかった.

1–5 [**熱容量の正値性**]: レポート問題なので，解答は後回し.

1–6 [**偏微分の練習 1**]: やってみる.

(a) この問題は，万有引力やクーロン力の $1/r$ 型のポテンシャルから力を出す計算である.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} = -\frac{1}{2}2x\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = \frac{-x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

y,z についても同様である.

[1] $1\mathrm{cal} = 4.19\mathrm{J}$ である.

(b) そのポテンシャルがラプラス方程式を満たすことを示す問題である．

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{-1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{3}{2}2x\frac{-x}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} = \frac{-1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \frac{3x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} &= \frac{-3}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \frac{3x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \\ &+ \frac{3y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} + \frac{3z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \\ &= 0\end{aligned}$$

1–7 [偏微分の練習 2]:

(a) $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = ae^{ax}\left(\cos by + \sin by\right), \quad \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = be^{ax}\left(\cos by - \sin by\right).$

(b) $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = yx^{y-1}, \quad \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^y \log(x).$

1–8 [偏微分 1]: 全微分であることの必要十分条件を示してみる．

(1)$P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ が $f(x,y)$ の全微分であるとき，

$$df(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

より，

$$P(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}, Q(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}$$

であることが分かり，

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{1}$$

であることが示される．

(2) 式 (1) が成り立つときに，「$P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ が $f(x,y)$ の全微分である」ことを示す．$F(x,y) = \int P(x,y)dx$ とおくと，$P(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}F(x,y)$ であり，$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}F(x,y)$ だから，$\dfrac{\partial}{\partial x}\left(Q - \dfrac{\partial}{\partial y}F(x,y)\right) = 0$ であることが分かる．ここから，$Q - \frac{\partial}{\partial y}F(x,y)$ は y だけの関数であるので，これを $G(y)$ とおく．

$$f(x,y) \equiv \int dyQ(x,y) = \int dy\left(\frac{\partial}{\partial y}F + G(y)\right) = F(x,y) + \int dyG(y)$$

とすると，

$$\frac{\partial f}{\partial y} = Q(x,y), \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \int dy\frac{\partial Q}{\partial x} = P(x,y)$$

であることが分かり，

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y} = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

が示された．

1–9 [**偏微分 2**]**:** 前問の具体的な例題と，全微分に慣れる練習．

$$P(x,y) = 3x^2 + 2xy - 2y^2, Q(x,y) = x^2 - 4xy$$

と置くと，

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x - 4y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x - 4y$$

となり，上の条件を満たしているので、全微分が存在する．

$$\begin{aligned}(3x^2 + 2xy - 2y^2)dx + (x^2 - 4xy)dy &= d(x^3) + d(x^2y) - x^2dy - d(2xy^2) + 4xydy + \\ &\quad (x^2 - 4xy)dy \\ &= d(x^3 + x^2y - 2xy^2) \qquad (2)\end{aligned}$$

となり，$f(x,y) = x^3 + x^2y - 2xy^2$+(定数) である．

1–10 [**偏微分 3**]**:** 式が P,T,V で書かれているが，物理とはまったく関係ない数学の性質として示される式ばかりである．

(a) T, V を独立変数として，$P(T,V)$ の全微分 dP は

$$dP = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T dV$$

である．ここで dP=0 としたときに，$\frac{dV}{dT} = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$ となるから，

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V + \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = 0 \qquad (3)$$

が示される．

(b) 今度は $dV = 0$ とすると，$\frac{dT}{dP} = \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V$ となるから，

$$1 = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V \qquad (4)$$

が分かる．

(c) 式 (4) より，

$$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V = 1/\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$$

であり，式 (3) より，

$$-1 = \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P / \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V$$

が成り立つ．

これは $P = P(T, V)$ と表せるときの一般的な性質である．P, T, V を圧力，温度，体積とすると，最後の式の右辺を観測することで $P(T, V)$ の検証が出来る．

1–11 [**偏微分 4**]: レポート問題なので，後回し．

1–12 [**理想気体の状態方程式**]: 示量変数をよく考えて，1 モルの状態方程式から，n モルに変更したい．

1 モルの気体の分子量を M，体積を V とし，n モルの気体の分子量を M'，その体積を V' とする．密度 ρ はどちらも一定であるとすると，$\rho = M/V = M'/V'$ であることから，$V' = \frac{M'}{M}V = nV$ であることがわかる．これを使って，P は示強変数であって分子量に依らないことに注意して，n モルの状態方程式を導くと，

$$PV' = P(nV) = n(PV) = nRT$$

となる．

1–13 [**気体定数**]: 1 気圧は $1.013 \times 10^5 Nm^{-2}$ であることに注意すると，

$$R = \frac{PV}{T} = \frac{1.013 \times 10^5 Nm^{-2} \times 22.4 \times 10^{-3} m^3}{273.15K} \simeq 8.307J/K$$

1–14 [**気体の体積**]: 理想気体の状態方程式から，体積を求めてみる．

$$V = n\frac{RT}{P} = \frac{10}{28}\frac{8.314 \times (28 + 273)}{2 \times 1.013 \times 10^5} \simeq 4.41 \times 10^{-3} m^3$$

ちなみにそのときの密度は，$\rho = 10/4.41 \times 10^{-3} \simeq 2.3 \cdot 10^3 \mathrm{g/m^3} = 2.3\mathrm{Kg/m^3}$ である．水の場合は，$1\mathrm{m}^3$ の体積での質量は約 1ton だから，気体との比は 10^{-3} くらいである．

1–15 [**状態方程式**]: 熱気球が浮かぶ理由を理想気体の状態方程式から考えてみる．まず，熱気球がつぶれない条件は，気球の内外での圧力がつり合うことである．気球の内部の気体はボイラーで温められていて，外部と熱力学的状態は異なっている．この