

第一回熱力学レポート問題 解答例

問題 1 「熱容量の正定値性」：2つの同じ物質をそれぞれ異なる温度 T_1 , $T_2 (> T_1)$ で熱平衡状態にしておく．簡単のために2つの物質の体積 V は同じとする．その後、断熱壁で囲みながら接触させるとやがて同じ温度 T^* になる．このときに、

$$T_1 < T^* < T_2$$

になったとする．この物質の熱容量を $C(T, V)$ とする．このときの熱の移動を考える．最初に T_1 であった物質は熱量 $Q_{1 \rightarrow *}$

$$Q_{1 \rightarrow *} = \int_{T_1}^{T^*} dTC(T, V)$$

の熱をもらう．最初に T_2 であった物質は熱量 $Q_{2 \rightarrow *}$

$$Q_{2 \rightarrow *} = \int_{T_2}^{T^*} dTC(T, V)$$

を出す．断熱壁で囲まれているので、熱の終始はつりあっているので、 $Q_{1 \rightarrow *} = -Q_{2 \rightarrow *}$ であり、

$$\int_{T_1}^{T^*} dTC(T, V) = - \int_{T_2}^{T^*} dTC(T, V)$$

となる．

もし、熱容量の符号がある温度で変化したとする．ある温度 T_0 に対して、

$$\int_{T_1}^{T_2} dTC(T, V) = 0$$

になるような適当な温度 $T_1 < T_0 < T_2$ を選ぶことができる． $T_0 = T^*$ とすると、

$$\int_{T_1}^{T^*} dTC(T, V) + \int_{T_2}^{T^*} dTC(T, V) = 0$$

となるから、 $Q_{1 \rightarrow *} = \int_{T_1}^{T^*} dTC(T, V) = 0$ となり、熱的作用しかない状況で、熱の移動に伴わずに温度が変化したことになり、これは温度の性質と矛盾する．

問題 2 「面積最大形」：

四角形の場合: ここでは簡単に平行四辺形に限定したので、とても単純である．底辺の長さを x ，側辺とのなす角を y とすると、面積は、 $S(x, y) = x(\frac{t}{2} - x) \sin y$ となる．四角形を作る条件の角度の範囲のときには $\sin y$ は正であるので、問題は簡単である．極値の条件から、 $\frac{\partial S}{\partial x} = (\frac{1}{2} - 2x) \sin y = 0$ より、 $x = t/4$ であり、 $\frac{\partial S}{\partial y} = 0$ より、 $y = \pi/2$ となり、正方形であることがわかる．また、これが極大であることも確かめられる．

三角形の場合: 辺の長さをそれぞれ a, b, c とすると, $t = a + b + c$ であり, ヘロンの公式より三角形の面積 S は,

$$S = \left(\frac{t}{2} \left(\frac{t}{2} - a \right) \left(\frac{t}{2} - b \right) \left(\frac{t}{2} - c \right) \right)^{1/2}$$

となる. 独立な変数を $a = x, b = y$ とすると, $c = t - x - y$ であり,

$$f(x, y) = \frac{t}{2} \left(\frac{t}{2} - x \right) \left(\frac{t}{2} - y \right) \left(x + y - \frac{t}{2} \right)$$

を最大化すればよいことになる. 極大の必要条件 (極値の条件) は, $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ である.

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{t}{2} \left(\frac{t}{2} - y \right) \left(-x - y + \frac{t}{2} + \frac{t}{2} - x \right)$$

これと同様に $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ の条件から, さらに三角形の条件にあう解は $x = y = t/3$ であることがわかる. これが極大であるためには曲率 (2 階微分) まで調べないといけないが, 調べてみると極大になっていることがわかる.

問題 3 「van der Waals 気体の状態方程式」: 1-12 より, $V' = nV$ であるから, 1 モルの状態方程式から

$$\left(P + \frac{a}{V^2} \right) (V - b) = \left(P + \frac{an^2}{V'^2} \right) (V'/n - b) = RT$$

となり,

$$\left(P + \frac{an^2}{V'^2} \right) (V' - bn) = nRT$$

が求まる. $a = b = 0$ とすると, 1-12 の n モルの理想気体の状態方程式に戻る.

第二回熱力学レポート問題

福島孝治 (東京大学大学院総合文化研究科)

問題 1 「仕事と熱量と第一法則」: 1 モルの van der Waals 気体の状態方程式は,

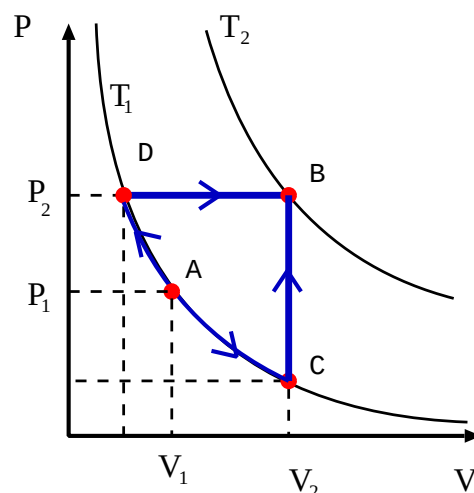
$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$$

であり, その内部エネルギーは,

$$U(T, V) = cT - \frac{a}{V}$$

に従うものとする (練習問題 2-8). ここで, a, b, c は定数とする.

右図の矢印の過程で状態 $A(P_A, V_A, T_1)$ から状態 $B(P_B, V_B, T_2)$ へこの気体の状態を変化させるとき, 気体がした仕事と気体が受け取った熱量を, 中間状態が C, D のそれぞれの場合について求めよ. ただし, 状態 C, D は状態 A から等温過程で移行される.



問題 2 「圧力一定と体積一定の条件での比熱」: 一般に, 定圧比熱は定積比熱よりも大きい. その理由を議論せよ.

問題 3 「講義について」: 講義に関するコメントがあれば...

〆切は 6 月 13 日とする. 提出先は 16-221A の前の封筒で, 〆切後に講義の WEB ページに解答例を示す.