には，あるいは並列に n 個のサイクルを動かしたときに，受け取る熱量は nQ であり，仕事の総量は nW になる．一方で，熱効率 η は受け取った熱量のうちに仕事へ変換された割合のことであるので，$\eta = \frac{W}{Q} = \frac{nW}{nQ}$ となり，n には依存しない．

3–6 [**Carnot サイクルの熱効率**]: 温度 T_2 の高温の熱源から熱を受け取り，正の仕事 W を行い，温度 T_1 の低温の熱源に熱を渡す 2 つの Carnot サイクル C, C' を考える．サイクル C は高温熱源から Q_2 を，C' は Q_2' を受け取るとする．これらは Carnot サイクルであるので，逆サイクルが存在する．C' の逆サイクル $\overline{C'}$ は外から W の仕事をされて，高温熱源へ Q_2' の熱を渡すサイクルとなる．C と $\overline{C'}$ を連結させる．

この連結サイクル $C + \overline{C'}$ は，高温熱源へ $Q_2' - Q_2 = \Delta Q_2$ の熱を渡すことになるが，この ΔQ_2 はゼロであることが示される．ΔQ_2 が負であるとすると，高温熱源から ΔQ_2 を受け取り，低温熱源にそのまま渡すことになり，これは不可逆であり，Carnot サイクルであることに反する．一方で，ΔQ_2 が正であるとすると，これは低温熱源から高温熱源へ他に何もしないまま ΔQ_2 の熱を渡すことになり、Clausius の原理に反する．つまり，$\Delta Q_2 = 0$ であり，$Q_2 = Q_2'$ であることが分かる．

このことから，温度が決まった 2 つの熱源の間である仕事 W をする Carnot サイクルが熱源とやりとりする熱 Q_2 は熱源の温度で決まることが分かる．さらに，前問より熱効率はサイクル回数に依存しないことから，仕事 W にも依存しないことがわかる．よって，Carnot サイクルの熱効率は熱源の温度だけに依存する．

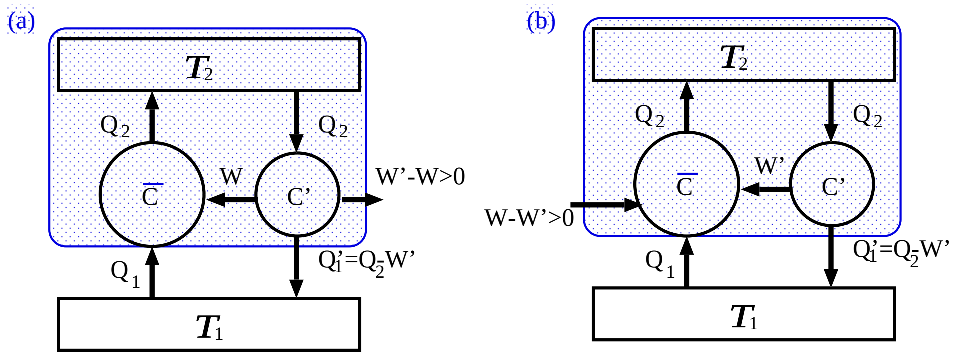
3–7 [**熱効率の限界**]: 高温 T_2 と低温 T_1 の熱源の間での Carnot サイクル C が，Q_2 の熱をもらって，仕事 W をする．ここに同じ熱 Q_2 をもらって、ある仕事 W' をする別の仕事をするサイクル C' を考える．前問の結果から，C' が Carnot サイクルのときは $W' = W$ となる．

(a) $W' > W$ のとき，つまり Carnot サイクルよりも効率のよいサイクルが存在したとする．このとき，下図のように逆 Carnot サイクル $\overline{C}$ と連結させ，C' のした仕事のうち W だけを $\overline{C}$ にする．このとき、この連結サイクルは低温から熱を受け取って，仕事 $W' - W (> 0)$ を外にすることになり，Kelvin の原理に反することになり，存在できない．

(b) $W' < W$ のとき，同様に考えると，連結サイクルでは，外から $W' - W$ の仕事されて，低温熱源に熱を渡すサイクルになっている．これは不可逆である[5]．

よって，どんなサイクルでも Carnot サイクルの効率を上回ることはできず，また下回る効率のサイクルは不可逆であることが示された．

[5] 可逆であるとすると，Kelvin の原理に反するサイクルになる．



3–8 **[Carnot サイクルの熱効率 (計算編)]:** この問題では Carnot サイクルの熱効率を計算してみる．

サイクル過程で熱源と熱のやりとりがあるのは，2 つの等温過程のみである．高温の熱源 T_1 と等温過程において，理想気体は温度一定のときに内部エネルギーは変化しないから，第一法則より外への仕事 $W_{1\to2}$ と熱源から受け取る熱 $Q_{1\to2}$ は等しい． 状態 1 と 2 の体積をそれぞれ V_1, V_2 として，

$$W_{1\to2} = Q_{1\to2} = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT_1}{V} dV = nRT_1 \log \frac{V_2}{V_1}$$

また，同様に低温熱源 T_2 とのやりとりから

$$Q_{3\to4} = W_{3\to4} = nRT_2 \log \frac{V_4}{V_3}$$

よって，熱効率 η は

$$\eta = \frac{Q_{1\to2} - Q_{3\to4}}{Q_{1\to2}} = 1 - \frac{Q_{3\to4}}{Q_{1\to2}} = 1 - \frac{T_2 \log \frac{V_4}{V_3}}{T_1 \log \frac{V_2}{V_1}}$$

である．一方で，断熱過程 $4 \to 1$ では，ポアソンの関係より，$T_2 V_4^{\gamma-1} = T_1 V_1^{\gamma-1}$ であり，同様に断熱過程 $2 \to 3$ では $T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1}$ である．ここから，

$$\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_3}{V_4}\right)^{\gamma-1}, \quad \Longrightarrow \quad \frac{V_1}{V_2} = \frac{V_3}{V_4}.$$

であり，$\underline{\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}}$ である．

3–9 **[摩擦のあるシリンダー]:** 摩擦のあるシリンダーでの仕事について考察するのがこの問題の趣旨である．シリンダー内部の気体の圧力を P，外気圧を P' として，ピストン部分の面積を S として，膨張時 (a) と圧縮時 (b) に分けて考える．準静的過程では力はつり合うとしてよく，(a) 膨張時でのつりあいの式は， $P'S + F = PS$．ピストンを微小区間 Δl だけ動かすときの外力のする仕事 $d'W$ は $d'W = -P'S\Delta l =$

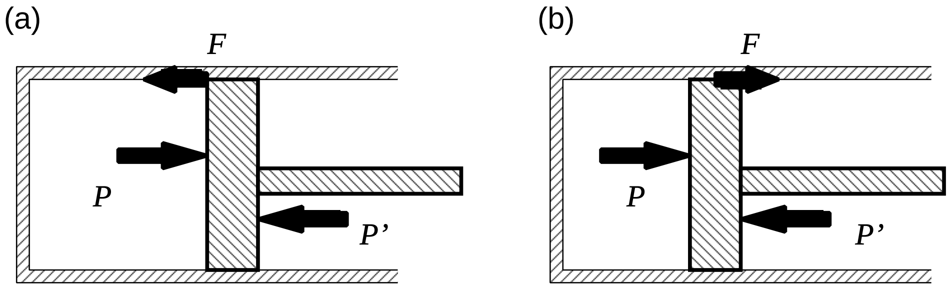
$-P\Delta V + F\Delta l$ である．一方，(b) 圧縮時は，$PS + F = P'S$ であることから，$d'W = P'S\Delta l = P\Delta V + F\Delta l$ である．膨張前後の状態をそれぞれ A, B とすると，膨張時と圧縮時の内部エネルギーの差を第一法則から求めると，

$$U_B - U_A = -P\Delta V + F\Delta L + d'Q, \quad U_A - U_B = P\Delta V + F\Delta L + d''Q.$$

となり，両辺を足しあわせると，

$$0 = 2F\Delta l + d'Q + d''Q$$

となる．摩擦力 F がないときは，$d'Q = -d''Q$ であることが分かる．



3–10 [**摩擦のあるシリンダーでの熱効率****]: 問 **3-8** において，等温圧縮時に一定の摩擦力 F が働いていたとすると，

$$Q_{3\to4} = W_{3\to4} = \int_{V_3}^{V_4} (PdV + \frac{F}{S}dV) = nRT_2 \log \frac{V_4}{V_3} + \frac{F(V_4 - V_3)}{S}$$

となり，熱源に渡す熱が第二項分だけ多くなる．それだけ効率が悪くなる．

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} - \frac{F(V_4 - V_3)}{SnRT_1 \log \frac{V_2}{V_1}}$$

3–11 [**ディーゼルサイクルの熱効率**]:

断熱過程 ($1 \to 2$): 状態 1 の温度と体積を (T_1, V_1) とし，同様に状態 2 を (T_2, V_2) とする．理想気体の断熱膨張では，$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}$ が成り立つ．断熱なので，熱の出入りは無い．

定積過程 ($2 \to 3$): 定積比熱を C_V として，受け取る熱は $Q_{2\to3} = C_V(T_3 - T_2) < 0$ となり，ここでは熱は放出している．

断熱過程 ($3 \to 4$): 断熱圧縮されているので，$T_3 V_3^{\gamma-1} = T_4 V_4^{\gamma-1}$.

定圧過程 ($4 \to 1$): 温度は T_4 から T_1 へ上昇し，体積は V_4 から V_1 へ膨張する．この間に受け取る熱は，定圧比熱を C_P として，$Q_{4\to1} = C_P(T_1 - T_4)$.

これで 1 サイクルが終了する．熱効率は，

$$\eta = \frac{Q_{1\to4} + Q_{2\to3}}{Q_{1\to4}} = \frac{C_P(T_1 - T_4) + C_V(T_3 - T_2)}{C_P(T_1 - T_4)} = 1 - \frac{T_2 - T_3}{\gamma(T_1 - T_4)}$$

と求まる[6].

3–12 [**Otto サイクルの熱効率**]**:** 後で解答.

3–13 [**一般の熱源の場合の熱効率**]**:** Carnot サイクルでは 2 つの熱源 (高温と低温) とだけ熱のやりとりをすることを考えていたが，一般に複数，あるいは連続的に温度の変わる熱源と熱のやりとりをするサイクルの熱効率について考えてみる．前問の Otto サイクルはその例になっている．Otto サイクルが熱源から熱を受け取る過程は $1 \to 4$ であり，$d'Q_{1\to4} > 0$ である．また，熱を外に捨てる過程は $2 \to 3$ であり，そとからもらう熱は $d'Q_{2\to3} < 0$ である．Clauius の不等式より，

$$\int_{1\to4} \frac{d'Q}{T_e} + \int_{2\to3} \frac{d'Q}{T_e} \leq 0$$

である．ここで T_e は熱源の温度を表す．その他の過程は断熱であるので，$d'Q = 0$ である．また，熱源からもらう熱は，$Q_1 = \displaystyle\int_{1\to4} d'Q$ であり，熱源に捨てる熱は，$Q_2 = -\displaystyle\int_{2\to3} d'Q$ である．過程 $1 \to 4$ での最大値を $T_{\max} = T_1$ として，過程 $2 \to 3$ での最小値を $T_{\min} = T_3$ とすれば，

$$\frac{Q_1}{T_{\max}} \leq \int_{1\to4} \frac{d'Q}{T_e} \leq -\int_{2\to3} \frac{d'Q}{T_e} \leq \frac{Q_2}{T_{\min}}$$

であることがわかる．ここから，

$$\frac{Q_2}{Q_1} \geq \frac{T_{\min}}{T_{\max}}$$

が導け，外にする仕事 W は $W = Q_1 - Q_2$ であるから，熱効率の上限は，

$$\eta = \frac{W}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} \leq 1 - \frac{T_{\min}}{T_{\max}}$$

となる．

3–14 [**理想気体の換算熱**]**:** 熱力学第一法則より $dU = d'Q + d'W$ であるが，準静的過程より $d'W = -PdV$ である．理想気体の定積熱容量 C_v が温度に依らないことから，$dU = C_v dT$ と表される．また理想気体の状態方程式より，

$$d'Q = dU + PdV = C_v dT + \frac{RT}{V}dV, \implies \frac{d'Q}{T} = \frac{C_v}{T}dT + \frac{R}{V}dV$$

となる．$\dfrac{\partial}{\partial V}\left(\dfrac{C_v}{T}\right) = \dfrac{\partial}{\partial T}\left(\dfrac{R}{V}\right) (= 0)$ より，$\dfrac{d'Q}{T}$ は全微分である[7].

---

[6] もうちょっとコンパクトにまとまるかもしれない．そもそも 4 つの温度で書いても仕方がないので、うまく圧縮比とかで表したい．

[7] 全微分であることの必要十分条件は練習問題 **1–8** を参照のこと．