物理学 (熱力学) 演習問題集

福島孝治 (東大院総合文化)*

Ver. 2.24 (2009.4.15)

*E-mail: hukusima@phys.c.u-tokyo.ac.jp, URL:http://maildbs.c.u-tokyo.ac.jp/~fukushima/FSwiki/wiki.cgi

はじめに

この演習問題集は，福島が担当する大学１年生の物理の講義の補習として利用することが想定されている．講義で話した内容が問題形式で書かれていることもあるし，講義の内容から当然解けるべき問題も含まれている．物理学を専攻する学生が腕を組ながら解くような類の問題集ではなく，講義で学んだ知見を深めるための復習・補習に役立てることが主たる目的の演習書である．実際に手を動かしてみて初めて理解できる，いや，理解したと“感じる”ことは経験的には少なくない．目で見て，耳から聞いて，やはり肌で感じることが理解する上で大切である．この意味で，演習書を手にすることは重要であり，これまでも学生さんから多くの要望があった．市販の演習書を探すことがその一つの解であるが，必ずしも得策とは個人的には感じない．これほどの基本的な問題程度に散財する価値がなかなか見出せないわけである．それならば，もっと古典的な名著を買うべきである．ファインマンレクチャーシリーズや，物理学専攻を目指す学生さんならばランダウ・リフシッツだろう．余談が長くなったが，この問題集が多くの大学生であるみなさんの手を動かすきっかけになることを切に望む．

本問題集は市販の演習書よりはていねいな解答を心がけたが，いろいろと練られていないところも多いだろうことは了承頂きたい．現時点で気がついている問題点は，

- 問題の難易度を明示していないこと，
- 一般の１年生で習う物理学の広い領域をカバーできてる感じがしないこと，

である．

この問題集を編集するにあたり，これまでに講義に出席してくれた多くの学生からコメントや指摘を頂いた．また，大学院生の中島哲也君には丁寧に解答例を読んでいただいた．心から感謝したい．なお間違いがあるとすれば，筆者の責任である．是非，間違いを見つけたりや不明な点があれば，御指摘頂きたい．

福島孝治
東京大学大学院総合文化研究科
平成21年4月8日

目 次

1 熱力学の基本:熱と熱量 1

2 熱力学第一法則 3

3 熱力学第二法則 5

4 熱力学関数 9

5 相転移の熱力学 10

1 熱力学の基本:熱と熱量 (解答編) 12

2 熱力学第一法則 (解答編) 18

3 熱力学第二法則 (解答編) 23

4 熱力学関数 (解答編) 36

5 相転移の熱力学 (解答編) 39

version:	date	更新内容
Ver. 1.0:	2007.5.20	初版
Ver. 1.1:	2007.5.30	added Sec.3
Ver. 1.2:	2007.6.19	modified Sec.3
Ver. 2.0:	2008.4.17	若干の修正
Ver. 2.1:	2008.4.25	sec.1 追加
Ver. 2.2:	2008.6.12	sec.2 問題追加
Ver. 2.24:	2009.4.15	若干の修正

物理学 (熱力学) 問題編

1　熱力学の基本:熱と熱量

1–1 [熱量 1]:
水の比熱はいくらか? 500g の水温度を 5K だけあげるために必要な熱量は何 cal か?

1–2 [熱量 2]:
10 円硬貨はおよそ 12g であり，その主成分は銅である．この硬貨の温度が 5K 下がった．硬貨から失われた熱量は何 cal か?ただし，銅の比熱は 0.094cal/gK である．

1–3 [比熱の測定方法]:
質量 m[g]，温度 t[K] の水槽に質量 M[g]，温度 T[K] の物体を入れて放置する．しばらくすると，両者の温度は T' になった．物体の比熱を求めよ．ただし，$t < T' < T$ であり，水槽は断熱壁に囲んであり，外部とに熱の出入りはないとする．

1–4 [熱の仕事当量]:
体重 60Kg の人が，2 階の教室まで歩いて来た．そのときに必要な仕事は最低何 J か?それを熱量に換算すると何 cal になるか?また，それだけの熱量を水 200g に加えると，水の温度は何 K 上がるか?

1–5 [熱容量の正定値性]:
温度の経験則から，熱容量の符号が一定であることを示せ．

1–6 [偏微分の練習 1]:
三変数関数 $f(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ に対して，次の問に答えよ．ただし，$x^2 + y^2 + z^2 \neq 0$ とする．

(a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial z}$ を求めよ．

(b) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$ を示せ．

1–7 [偏微分の練習 2]:
次の二変数関数 $f(x,y)$ の偏微分 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ をそれぞれ求めよ．

(a) $f(x,y) = e^{ax}(\cos by + \sin by)$

(b) $f(x,y) = x^y$

1–8 [偏微分 1]:
$P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ が関数 $f(x,y)$ の全微分であることと，

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

であることが，同値であることを示せ．

1–9 [偏微分 2]:
$(3x^2+2xy-2y^2)dx+(x^2-4xy)dy$ はある関数 $f(x,y)$ での全微分であることを示し，関数 $f(x,y)$ を求めよ．

1–10 [偏微分 3]:
3 つの変数 P,T,V の間に関数関係 $f(P,T,V)=0$ があるときに，次の関係式を証明せよ．

(a) $\left(\dfrac{\partial P}{\partial T}\right)_V+\left(\dfrac{\partial P}{\partial V}\right)_T\left(\dfrac{\partial V}{\partial T}\right)_P=0$

(b) $\left(\dfrac{\partial P}{\partial T}\right)_V\left(\dfrac{\partial T}{\partial P}\right)_V=1$

(c) $\left(\dfrac{\partial P}{\partial V}\right)_T\left(\dfrac{\partial V}{\partial T}\right)_P\left(\dfrac{\partial T}{\partial P}\right)_V=-1$

1–11 [偏微分 4]:
周の長さが t である平行四辺形の面積が最大になるのはどのような四辺形か?また，その面積を求めよ．ただし，$t>0$ とする．三角形の場合は?

1–12 [理想気体の状態方程式]:
1 モルの理想気体の状態方程式は，気体定数を R として，$PV=RT$ で与えられる．n モルの理想気体の状態方程式を求めよ．

1–13 [気体定数]:
すべての気体の 1 モルは，0^oC，1 気圧で $22.4l$ の体積を占める．ここから気体定数を求めよ．

1–14 [気体の体積]:
10g の窒素の気体は 28^oC，2 気圧で体積はいくらか?窒素の原子量は，$14\times 2=28$ である．

1–15 [状態方程式]:
熱気球の飛ぶ条件を議論せよ．

1–16 [圧力ー体積曲線]:
ファン・デル・ワールス気体の 1 モルの状態方程式は,

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT \tag{1}$$

である．ここで，a, b は物質に依存する正の定数である．温度一定の条件での圧力と体積の関係を様子をグラフに示せ．

1–17 [van der Waals 気体の状態方程式]:
ファン・デル・ワールス気体の n モルの状態方程式を求めよ．

2 熱力学第一法則

2–1 [サイクルの仕事]:
ある熱力学的状態から，別の状態を経由して再び同じ最初の状態の戻ってくる過程を**サイクル**と呼ぶ．このサイクル過程で，系が外からされた仕事を W，系が受け取った熱量 Q 間には，$W = -Q$ の関係があることを説明せよ．

2–2 [理想気体の仕事]:
n モルの理想気体を温度一定 T のまま体積を V_A から V_B まで膨張させた．この間に気体が外にする仕事は?

2–3 [圧力一定の仕事]:
圧力 P 一定のもとで，気体が V_A から V_B まで膨張する間に気体が外にする仕事は?

2–4 [実在気体の等温過程での仕事]:
n モルの実在気体の状態方程式は,

$$\frac{PV}{nRT} = 1 + B\left(\frac{N}{V}\right) + C\left(\frac{N}{V}\right)^2$$

と表される．温度一定 T のまま体積を V_A から V_B まで膨張させる間に気体が外にする仕事は?

2–5 [定圧比熱]:
定圧比熱 C_P は、式 $C_P = \left(\dfrac{\partial U}{\partial T}\right)_P + P\left(\dfrac{\partial V}{\partial T}\right)_P$ で表されることを示せ．

2–6 [マイヤーの関係式]:
理想気体の場合，マイヤーの関係式

$$C_P - C_V = R$$

が成り立つことを示せ．ここで C_V は定積比熱で、R は気体定数である．

2–7 [ポアソンの公式]:
理想気体の準静的断熱過程では PV^γ は一定であることを示せ．ただし，$\gamma = C_p/C_V$ である．

2–8 [理想気体の断熱曲線]:
理想気体を状態 (P_1, V_1, T_1) から状態 (P_2, V_2, T_2) へ準静的断熱過程で移行したときに，気体が外部にする仕事を求めよ．ただし，比熱は一定とする．

2–9 [**van der Waals** 気体の比熱]:
状態方程式が (1) に従う van der Waals 気体の内部エネルギーが $U = cT - \frac{a}{V}$ のとき，定積比熱 C_V および $C_P - C_V$ を求めよ．

2–10 [体積に依らない内部エネルギー]:
熱力学関係式

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P$$

を用いて[1]，状態方程式が $P = f(V)T$ の物質は内部エネルギーが体積に依らないことを示せ．

2–11 [定積比熱と定圧比熱]:
次の関係式を示せ．前問の関係式を用いて，

$$C_p - C_v = \frac{TV\beta^2}{\kappa}$$

を示せ．ここで，$\beta = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$ は体積膨張率，$\kappa = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$ は等温圧縮率である．

2–12 [定積比熱と定圧比熱の大小関係]:
一般に，定圧比熱は定積比熱よりも大きい．その理由を議論せよ．

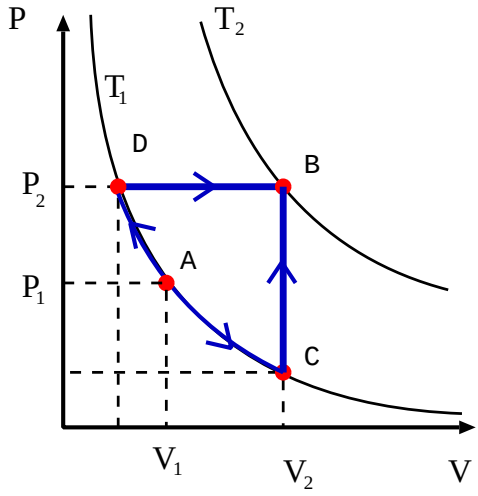
2–13 [ある気体の状態方程式]:
$P = \frac{2}{3}\frac{U}{V}$ で，内部エネルギ　が体積に依らず $U(T)$ である気体の状態方程式を定積比熱 C_V を用いて求めよ．

2–14 [理想気体の断熱曲線と等温曲線]:
理想気体の断熱曲線が等温曲線よりも傾きが急であることを示せ．すなわち，断熱曲線上に沿った $\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_{ad}$ が $\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T$ よりも大きいことを示せ．

2–15 [熱力学第一法則]:

[1] この関係式は後で証明する．

図の矢印の過程で状態 A(P_A, V_A, T_1) から状態 B(P_B, V_B, T_2) へ理想気体の状態を変化させるとき，気体がした仕事と気体が受け取った熱量を，中間状態が C,D のそれぞれの場合について求めよ．ただし，状態C, D は状態A から等温過程で移行される．



3　熱力学第二法則

3–1 [**Carnot サイクルの仕事**]:
Caronot サイクルは，外に正の仕事をすることを示せ．

3–2 [**K から C へ**]:
Kelvin の原理から，Clausius の原理を導け．

3–3 [**真空膨張の不可逆性**]:
理想気体を真空に対して断熱膨張させる過程が不可逆であることを示せ．

3–4 [**仕事 → 熱**]:
仕事 $W(>0)$ をすべて熱に変換する過程は不可逆過程であることを示せ．

3–5 [**サイクル回数と効率**]:
熱効率はサイクルを動かす回数に依存しないことを示せ．

3–6 [**Carnot サイクルの熱効率**]:
与えられた熱力学的温度 $T_1, T_2(>T_1)$ の元での Carnot サイクルの効率は，T_1 と T_2 だけで表せることを示せ．

3–7 [**熱効率の限界**]:
与えられた熱力学的温度 $T_1, T_2(>T_1)$ の元での Carnot サイクルよりも効率の悪いサイクルは不可逆サイクルであることを示せ．

3–8 [**Carnot サイクルの熱効率 (計算編)**]:
n モルの理想気体を作業物質として，右図のような状態変化をさせる Carnot サイクルの効率を求めよ．