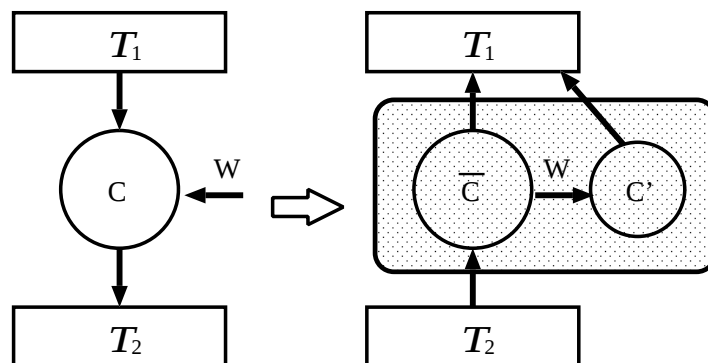


第三回熱力学レポート問題 解答例

レポート問題 3-1(a): 正の Carnot サイクルのする仕事。

まず，正の Carnot サイクルのする仕事をゼロとする．このとき，このサイクルは高温の熱源から低温の熱源に熱を移動させるだけになる．これは，Clausius の原理が否定するサイクルの逆サイクルになっている．もしこのサイクルが可逆であるとすると，その逆サイクルは，Clausius の原理に反するので，可逆サイクルでないことになる．この結果は，Carnot サイクルは可逆であることに反するので，仕事をゼロとした仮定が間違っていたことになる．

また，仕事を負であるとする．Carnot サイクルは可逆であるので，低温の熱源から熱をもらい，高温の熱源に熱を渡し，さらに外に仕事をする逆サイクルが存在することになる．そのサイクルを $\bar{C}$ とする．このサイクル $\bar{C}$ が外にした仕事 W を全て熱に変える装置 (例えば，Joule のはね車) を用いて，高温の熱源に熱を渡すとする．2つを合わせたサイクルでは，低温の熱源から熱をもらって，仕事することなく，高温の熱源に熱を渡すサイクルができたことになる (下図)．これは，Clausius の原理に反するので，ありえない．



これらより，正の Carnot サイクルをする仕事は正であることが示された．

レポート問題 3-1(b): 一つの熱源から。。。.

(1) 考えている等温可逆サイクルで外から入った熱 Q がゼロでないとする．一方で，サイクル過程では系は元の状態に戻っているので，外からされた仕事を W とすると，第一法則から $Q + W = 0$ である．ここで， $Q > 0$ とすると， $W = -Q < 0$ となり，受け取った熱を全て外に仕事することになり，Kelvin の原理に反する．また， $Q < 0$ とすると，外からもらった仕事を全部熱に変えることになるが，これは「可逆な」サイクルであることと矛盾する．これらから，残された可能性として， $Q = 0$ であり， $W = 0$ でなくてはならない．

(2) 考えている等温可逆サイクルに Clausius の不等式 $\int_{\text{サイクル}} \frac{d'Q}{T} \leq 0$ を当てはめてみる．可逆過程であることと熱源の一つの温度 T であることから，

$$\frac{1}{T} \int_{\text{等温可逆サイクル}} d'Q = 0$$

である．このことからすぐに熱源から受け取った熱の総量 Q はゼロであることが示される．また，第一法則より，サイクル過程での外から受け取った仕事は $W = -Q$ であり，それもゼロであることがわかる．このように第二法則から導かれた Clausius の不等式を用いても同じことが示される．

レポート問題 3-2: Otto サイクルの効率．

断熱過程 ($3 \rightarrow 4$): 状態 3 の温度と体積を (T_3, V_2) とし，同様に状態 4 を (T_4, V_1) とする．理想気体の断熱圧縮では， $T_3 V_2^{\gamma-1} = T_4 V_1^{\gamma-1}$ が成り立つ．断熱なので，熱の出入りは無い．

定積過程 ($4 \rightarrow 1$): 定積比熱を C_V として，受け取る熱は $Q_{4 \rightarrow 1} = C_V(T_1 - T_4) > 0$ となり，ここでは吸熱している．

断熱過程 ($1 \rightarrow 2$): 断熱膨張されているので， $T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}$ ．

定積過程 ($2 \rightarrow 3$): 再び，定積過程で圧力を下げる．この間に受け取る熱は， $Q_{2 \rightarrow 3} = C_V(T_3 - T_2) < 0$ であり，放熱している．

これで 1 サイクルが終了する．熱効率は，

$$\eta_{\text{Otto}} = \frac{Q_{4 \rightarrow 1} + Q_{2 \rightarrow 3}}{Q_{4 \rightarrow 1}} = \frac{C_V(T_1 - T_4) + C_V(T_3 - T_2)}{C_V(T_1 - T_4)} = 1 - \frac{T_2 - T_3}{T_1 - T_4}$$

となる．断熱過程の関係式より，

$$\frac{T_3}{T_4} = \frac{V_1^{\gamma-1}}{V_2^{\gamma-1}} = \frac{T_2}{T_1}$$

であるから，

$$\eta_{\text{Otto}} = 1 - \frac{1 - T_3/T_2}{1 - T_4/T_1} \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}$$

となる．

V_2/V_1 はピストンの圧縮比に相当する．これを 8 程度とする．理想気体として，2 原子分子を仮定すると， $\gamma = 7/5$ になる．このときの熱効率は，およそ 56% となる．なかなかよい熱効率である．

また，練習問題 3-13 より，Clausius の不等式から決まる熱効率の上限が存在する．それは，吸熱過程での熱源の最大温度 T_{max} と放熱過程での最低温度 T_{min} を用いて， $1 - \frac{T_{\text{min}}}{T_{\text{max}}}$ となる．Otto サイクルでは， $T_{\text{max}} = T_1$ であり， $T_{\text{min}} = T_3$ である．確かに， $\eta_{\text{Otto}} = 1 - T_2/T_1 < 1 - T_3/T_1$ である．

第四回熱力学レポート問題

福島孝治 (東京大学大学院総合文化研究科)

問題 1 「エントロピー (過去問から)」:

状態方程式が、体積だけの関数 $f(V)$ を用いて、

$$P = f(V)T$$

に従う気体について考える。

- 1 この気体の内部エネルギーは体積に依存せず、温度だけの関数であることを示せ。
(つまり、 $(\frac{\partial U}{\partial V})_T = 0$ を示せばよい)
- 2 具体的に、 $f(V) = \frac{1}{V-b}$ (b は定数) のとき、この気体のエントロピーを求めよ。ただし、定積熱容量は理想気体と同様に定数としてよい。

問題 2 「エンタルピー」: エンタルピーは $H(S, P) = U + PV$ で定義される。このエンタルピーが完全な熱力学関数であることを説明せよ。また、このエンタルピーから求まる Maxwell の関係式を求めよ。

問題 3 「エントロピー増大則」: 断熱過程、あるいは外界と熱のやりとりをしない孤立系において、エントロピーは増大することを示せ。また、身近にエントロピーが増えている現象の例を挙げよ。

問題 4 「講義について」: 講義の感想などがあれば。。

〆切は 2 週間後とする。提出先は 16-221A の前の封筒で、〆切後に講義の WEB ページに解答例を示す。