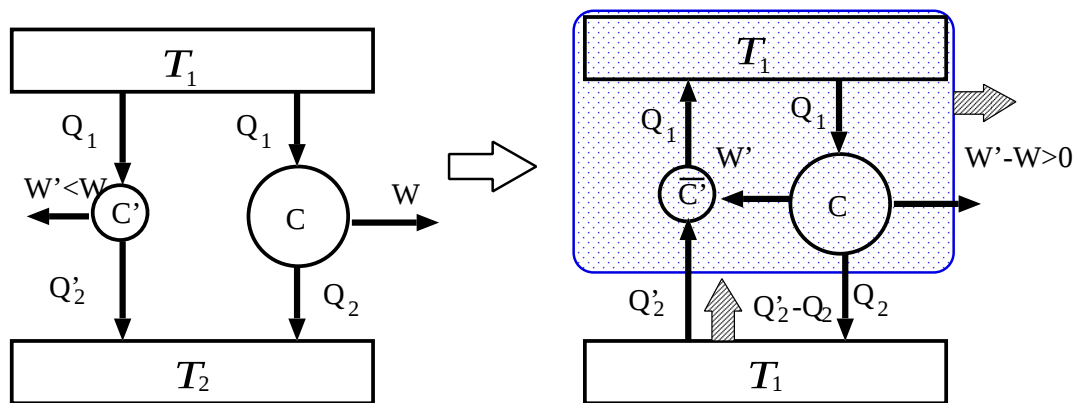


### 第三回熱力学レポート問題 解答例

レポート問題 3-1(a): Carnot サイクルよりも性能の悪いサイクルを  $C'$  とする．このサイクルは，高温の熱源  $T_1$  から熱  $Q_1$  を受け取って，仕事  $W'$  をする．このとき，熱効率  $\eta'$  は  $\eta' = W'/Q_1$  となる．一方で，Carnot サイクル  $C$  の熱効率は，同じ設定の元で， $\eta = W/Q_1$  とし， $\eta' < \eta$  とする (下図 (左)) ．

このサイクル  $C'$  が不可逆サイクルであることを示すには，このサイクルが可逆サイクルであると仮定して，逆サイクル  $\bar{C}'$  を作ることにする．この逆サイクルは，低温の熱源  $T_2$  から  $Q'_2 = Q_1 - W'$  を受け取り，外から  $W'$  の仕事されて，高温の熱源に  $Q_1$  を渡す．このサイクルと Carnot サイクルを下図 (右) のように結合させる．

このとき，高温の熱源との熱のやりとりは，二つのサイクルでちょうど釣り合う．結果としてこの二つのサイクルは全体で，低温の熱源から， $Q'_2 - Q_2$  の熱を受け取り，外に  $W - W' = Q'_2 - Q_2$  の仕事をすることになる．これは，熱  $Q'_2 - Q_2$  を完全に仕事に変換するサイクルが存在することになり，Kelvin の原理に反する．よって， $C'$  は可逆サイクルでないことが示された．



レポート問題 3-1(b): 一つの熱源から。。。.

(1) 考えている等温可逆サイクルで外から入った熱  $Q$  がゼロでないとする．一方で，サイクル過程では系は元の状態に戻っているのて，外からされた仕事を  $W$  とすると，第一法則から  $Q + W = 0$  である．ここで， $Q > 0$  とすると， $W = -Q < 0$  となり，このサイクルは受け取った熱を全て外に仕事をするることになり，Kelvin の原理に反する．また， $Q < 0$  とすると，外からもらった仕事を全部熱に変えることになるが，これは「可逆な」サイクルであることと矛盾する．これらから，残された可能性として， $Q = 0$  であり， $W = 0$  でなくてはならない．

(2) 考えている等温可逆サイクルに Clausius の不等式  $\oint_{\text{サイクル}} \frac{d'Q}{T} \leq 0$  を当てはめてみる．可逆過程であることと熱源の一つの温度  $T$  であることから，

$$\frac{1}{T} \oint_{\text{等温可逆サイクル}} d'Q = 0$$

である．このことからすぐに熱源から受け取った熱の総量  $Q$  はゼロであることが示される．また，第一法則より，サイクル過程での外から受け取った仕事は  $W = -Q$  であり，それもゼロであることがわかる．このように第二法則から導かれた Clausius の不等式を用いても同じことが示される．

### レポート問題 3-2: Otto サイクルの効率．

断熱過程 ( $3 \rightarrow 4$ ): 状態 3 の温度と体積を  $(T_3, V_2)$  とし，同様に状態 4 を  $(T_4, V_1)$  とする．理想気体の断熱圧縮では， $T_3 V_2^{\gamma-1} = T_4 V_1^{\gamma-1}$  が成り立つ．断熱なので，熱の出入りは無い．

定積過程 ( $4 \rightarrow 1$ ): 定積比熱を  $C_V$  として，受け取る熱は  $Q_{4 \rightarrow 1} = C_V(T_1 - T_4) > 0$  となり，ここでは吸熱している．

断熱過程 ( $1 \rightarrow 2$ ): 断熱膨張されているので， $T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}$ ．

定積過程 ( $2 \rightarrow 3$ ): 再び，定積過程で圧力を下げる．この間に受け取る熱は， $Q_{2 \rightarrow 3} = C_V(T_3 - T_2) < 0$  であり，放熱している．

これで 1 サイクルが終了する．熱効率は，

$$\eta_{\text{Otto}} = \frac{Q_{4 \rightarrow 1} + Q_{2 \rightarrow 3}}{Q_{4 \rightarrow 1}} = \frac{C_V(T_1 - T_4) + C_V(T_3 - T_2)}{C_V(T_1 - T_4)} = 1 - \frac{T_2 - T_3}{T_1 - T_4}$$

となる．断熱過程の関係式より，

$$\frac{T_3}{T_4} = \frac{V_1^{\gamma-1}}{V_2^{\gamma-1}} = \frac{T_2}{T_1}$$

であるから，

$$\eta_{\text{Otto}} = 1 - \frac{1 - T_3/T_2}{1 - T_4/T_1} \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}$$

となる．

$V_2/V_1$  はピストンの圧縮比に相当する．これを 8 程度とする．理想気体として，2 原子分子を仮定すると， $\gamma = 7/5$  になる．このときの熱効率は，およそ 56% となる．なかなかよい熱効率である．

熱効率の比較については，何かの条件を決めて比較しないといけないので，一般には難しい．よく知られているように，Carnot サイクルは最高の熱効率を示す．しかし，それには条件がついていて，「二つの熱源と熱のやりとりをする」サイクルの中では熱効率の限界を Carnot サイクルは与えている．しかし，一般に複数の熱源と熱のやりとりをする場合には，どのように比較すべきかはわからない．

しかしながら，練習問題 3-13 より，Clausius の不等式から決まる熱効率の上限が存在する．それは，吸熱過程での熱源の最大温度  $T_{\text{max}}$  と放熱過程での最低温度  $T_{\text{min}}$  を用いて， $1 - \frac{T_{\text{min}}}{T_{\text{max}}}$  となる．Otto サイクルでは， $T_{\text{max}} = T_1$  であり， $T_{\text{min}} = T_3$  である．確かに， $\eta_{\text{Otto}} = 1 - T_2/T_1 < 1 - T_3/T_1$  である．

## 第四回熱力学レポート問題

福島孝治 (東京大学大学院総合文化研究科)

問題 1 「エントロピー (過去問から)」:

状態方程式が、体積だけの関数  $f(V)$  を用いて、

$$P = f(V)T$$

に従う気体について考える。

- 1 この気体の内部エネルギーは体積に依存せず、温度だけの関数であることを示せ。  
(つまり、 $(\frac{\partial U}{\partial V})_T = 0$  を示せばよい)
- 2 具体的に、 $f(V) = \frac{1}{V-b}$  ( $b$  は定数) のとき、この気体のエントロピーを求めよ。ただし、定積熱容量は理想気体と同様に定数としてよい。

問題 2 「エンタルピー」: エンタルピーは  $H(S, P) = U + PV$  で定義される。ここで、 $U$  は内部エネルギー、 $P$  は圧力、 $V$  は体積である。エントロピー  $S$  と圧力  $P$  の関数として表されるエンタルピーが完全な熱力学関数であることを説明せよ。また、このエンタルピーから求まる Maxwell の関係式を求めよ。

問題 3 「エントロピー増大則」: 断熱過程、あるいは外界と熱のやりとりをしない孤立系において、エントロピーは増大することを示せ。また、身近にこのエントロピーが増えている現象の例を挙げよ。

問題 4 「講義について」: 講義の感想などがあれば。。。

✂切は2週間後とする。提出先は 16-221A の前の封筒で、✂切後に講義の WEB ページに解答例を示す。