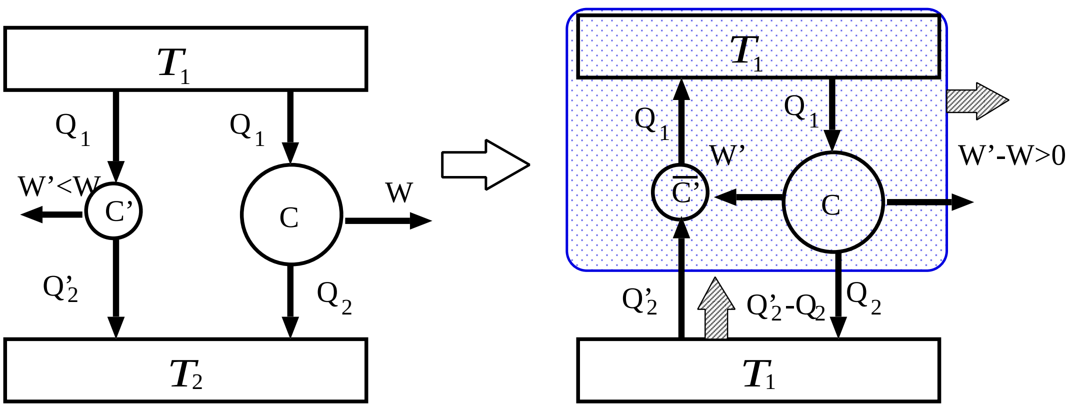
第三回熱力学レポート問題　解答例

レポート問題 3-1(a): Carnot サイクルよりも性能の悪いサイクルを C' とする．このサイクルは，高温の熱源 T_1 から熱 Q_1 を受け取って，仕事 W' をする．このとき，熱効率 η' は $\eta' = W'/Q_1$ となる．一方で，Carnot サイクル C の熱効率は，同じ設定の元で，$\eta = W/Q_1$ とし，$\eta' < \eta$ とする (下図 (左))．

このサイクル C' が不可逆サイクルであることを示すには，このサイクルが可逆サイクルであると仮定して，逆サイクル $\overline{O}'$ を作ることにする．この逆サイクルは，低温の熱源 T_2 から $Q_2' = Q_1 - W'$ を受け取り，外から W' の仕事されて，高温の熱源に Q_1 を渡す．このサイクルと Carnot サイクルを下図 (右) のように結合させる．

このとき，高温の熱源との熱のやりとりは，二つのサイクルでちょうど釣り合う．結果としてこの二つのサイクルは全体で，低温の熱源から，$Q_2' - Q_2$ の熱を受け取り，外に $W - W' = Q_2' - Q_2$ の仕事をすることになる．これは，熱 $Q_2' - Q_2$ を完全に仕事に変換するサイクルが存在することになり，Kelvin の原理に反する．よって，C' は可逆サイクルでないことが示された．



レポート問題 3-1(b): 一つの熱源から。。。

(1) 考えている等温可逆サイクルで外から入った熱 Q がゼロでないとする．一方で，サイクル過程では系は元の状態に戻っているので，外からされた仕事を W とすると，第一法則から $Q + W = 0$ である．ここで，$Q > 0$ とすると，$W = -Q < 0$ となり，このサイクルは受け取った熱を全て外に仕事をすることになり，Kelvin の原理に反する．また，$Q < 0$ とすると，外からもらった仕事を全部熱に変えることになるが，これは「可逆な」サイクルであることと矛盾する．これらから，残された可能性として，$Q = 0$ であり，$W = 0$ でなくてはならない．

(2) 考えている等温可逆サイクルに Clausius の不等式 $\int_{\text{サイクル}} \frac{d'Q}{T} \leq 0$ を当てはめてみる．可逆過程であることと熱源の一つの温度 T であることから，

$$\frac{1}{T}\int_{\text{等温可逆サイクル}} d'Q = 0$$

である．このことからすぐに熱源から受け取った熱の総量 Q はゼロであることが示される．また，第一法則より，サイクル過程での外から受け取った仕事は $W = -Q$ であり，それもゼロであることがわかる．このように第二法則から導かれた Clausius の不等式を用いても同じことが示される．

レポート問題 3-2: Otto サイクルの効率．

断熱過程 $(3 \to 4)$**:** 状態 3 の温度と体積を (T_3, V_2) とし，同様に状態 4 を (T_4, V_1) とする．理想気体の断熱圧縮では，$T_3 V_2^{\gamma-1} = T_4 V_1^{\gamma-1}$ が成り立つ．断熱なので，熱の出入りは無い．

定積過程 $(4 \to 1)$**:** 定積比熱を C_V として，受け取る熱は $Q_{4\to1} = C_V(T_1 - T_4) > 0$ となり，ここでは吸熱している．

断熱過程 $(1 \to 2)$**:** 断熱膨張されているので，$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}$．

定積過程 $(2 \to 3)$**:** 再び，定積過程で圧力を下げる．この間に受け取る熱は，$Q_{2\to3} = C_V(T_3 - T_2) < 0$ であり，放熱している．

これで 1 サイクルが終了する．熱効率は，

$$\eta_{\mathrm{Otto}} = \frac{Q_{4\to1} + Q_{2\to3}}{Q_{4\to1}} = \frac{C_V(T_1 - T_4) + C_V(T_3 - T_2)}{C_V(T_1 - T_4)} = 1 - \frac{T_2 - T_3}{T_1 - T_4}$$

となる．断熱過程の関係式より，

$$\frac{T_3}{T_4} = \frac{V_1^{\gamma-1}}{V_2^{\gamma-1}} = \frac{T_2}{T_1}$$

であるから，

$$\eta_{\mathrm{Otto}} = 1 - \frac{1 - T_3/T_2}{1 - T_4/T_1}\frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}$$

となる．

V_2/V_1 はピストンの圧縮比に相当する．これを 8 程度とする．理想気体として，2 原子分子を仮定すると，$\gamma = 7/5$ になる．このときの熱効率は，およそ 56% となる．なかなかよい熱効率である．

熱効率の比較については，何かの条件を決めて比較しないといけないので，一般には難しい．よく知られているように，Carnot サイクルは最高の熱効率を示す．しかし，それには条件がついていて，「二つの熱源と熱のやりとりをする」サイクルの中では熱効率の限界を Carnot サイクルは与えている．しかし，一般に複数の熱源と熱のやりとりをする場合には，どのように比較すべきかはわからない．

しかしながら，練習問題 **3-13** より，Clausius の不等式から決まる熱効率の上限が存在する．それは，吸熱過程での熱源の最大温度 $T_{\max}$ と放熱過程での最低温度 $T_{\min}$ を用いて，$1 - \frac{T_{\min}}{T_{\max}}$ となる．Otto サイクルでは，$T_{\max} = T_1$ であり，$T_{\min} = T_3$ である．確かに，$\eta_{\mathrm{Otto}} = 1 - T_2/T_1 < 1 - T_3/T_1$ である．

第四回熱力学レポート問題

福島孝治 (東京大学大学院総合文化研究科)

問題 1 「エントロピー (過去問から)」: 状態方程式が，体積だけの関数 $f(V)$ を用いて，

$$P = f(V)T$$

に従う気体について考える．

1 この気体の内部エネルギーは体積に依存せず，温度だけの関数であることを示せ (つまり，$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = 0$ を示せばよい)．

2 具体的に，$f(V) = \dfrac{1}{V-b}$,(b は定数) のとき，この気体のエントロピーを求めよ．ただし，定積熱容量は理想気体と同様に定数としてよい．

問題 2 「エンタルピー」: エンタルピーは $H(S,P) = U + PV$ で定義される．ここで，U は内部エネルギー，P は圧力，V は体積である．エントロピー S と圧力 P の関数として表されるエンタルピーが完全な熱力学関数であることを説明せよ．また，このエンタルピーから求まる Maxwell の関係式を求めよ．

問題 3 「エントロピー増大則」: 断熱過程，あるいは外界と熱のやりとりをしない孤立系において，エントロピーは増大することを示せ．また，この法則の直接の帰結として導かれる身近なエントロピー増大現象の例を挙げよ．

問題 4 「講義について」: 講義の感想などがあれば。。。

〆切は 2 週間後とする．提出先は 16-221A の前の封筒で，〆切後に講義の WEB ページに解答例を示する．