

物理学(力学) 練習問題編

福島孝治 (東大院総合文化)

Ver. 1.0:

1 運動の記述

1.1 質点の位置ベクトル

問 1.1-1 質点の位置ベクトルが

$$\mathbf{r} = (a \cos(\omega t), b \sin(\omega t), 0) \quad (a > 0, b > 0)$$

で与えられている. x 座標, y 座標の時間 t 依存性をグラフに示せ.

問 1.1-2 前問について, xy 平面上での質点の運動の様子を図示せよ.

問 1.1-3 前問の運動について, 質点の位置の原点からの距離を時間の関数として求めよ.

問 1.1-4 質点の位置ベクトルが

$$\mathbf{r} = \left(at, 0, bt - \frac{1}{2}gt^2 \right) \quad (a > 0, b > 0, g > 0)$$

で与えられている. x 座標, z 座標の時間 t 依存性をグラフに示せ.

1.2 速度ベクトル

問 1.2-1 微分に関する以下の問いに答えよ.

1. $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$ を示せ.
2. $\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = \left(\frac{d}{dx}f(x)\right)g(x) + f(x)\left(\frac{d}{dx}g(x)\right)$ を示せ.
3. $y(x) = \exp(-\alpha x)$ について, x の 1 回微分を求めよ.
4. $y(x) = \exp(-\alpha x)$ について, x の n 回微分を求めよ.
5. $y(x) = \sin(x)$ について, x の 1 回微分を求めよ.
6. $y(x) = \frac{x^n}{x+1}$ について, x の 1 回微分を求めよ.
7. $y(x) = \frac{x^n}{x+1}$ について, x の n 回微分を求めよ.

問 1.2-2 問 1.1-1 の位置ベクトルに対して, 速度ベクトル $\mathbf{v}$ を求めよ

1.3 加速度ベクトル

問 1.3-1 問 1.1-1 の位置ベクトルに対して、加速度ベクトル $\mathbf{a}$ を求めよ

問 1.3-2 上の問題の速度ベクトル $\mathbf{v}$ と加速度ベクトル $\mathbf{a}$ の内積を求めよ．その結果からわかることは？

問 1.3-3 ある物体の $x(t)$ 座標が時間の関数として、 $x(t) = \frac{1}{2}gt^2$ と表すことができる．この物体の速度と加速度の x 成分を時間の関数として求めよ．

問 1.3-4 ある物体の $x(t)$ 座標が時間の関数として、 $x(t) = A \sin(\omega t + \alpha)$ で表される．この運動をグラフに描いてみよ．また、この物体の速度と加速度の x 成分を時間の関数として求めよ．

1.4 次元

問 1.4-1 速度、加速度の次元を長さの次元 L 、時間の次元 T を用いて表せ．

問 1.4-2 位置ベクトルの x 成分が $x(t) = a + bt + ct^2$ と表されるとき、 a, b, c の次元を求めよ．

1.5 ベクトルの演算

問 1.5-1 ベクトル $\mathbf{A} = (4, 0, 0)$ と $\mathbf{B} = (0, 3, 0)$ について、(a) $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ 、(b) $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ を図示せよ．また、それぞれのベクトルの大きさを求めよ．

問 1.5-2 ベクトル $\mathbf{A}$ は大きさが 6 で、 x 軸から 45 度 y 軸方向へ回転した方向を向いている．ベクトル $\mathbf{B}$ は大きさが 6 で、 $-x$ 軸方向を向いている．(a) $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ 、(b) $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ を図示せよ．また、それぞれのベクトルの大きさを求めよ．

問 1.5-3 3 つのベクトルが与えられている． $\mathbf{A} = (2, 3, -4)$ 、 $\mathbf{B} = (2, -2, 2)$ 、 $\mathbf{C} = (-1, 2, 1)$ ．

1. ベクトル $\mathbf{B}$ の単位ベクトルを求めよ．
2. $\mathbf{D} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ 、 $\mathbf{E} = 2\mathbf{A} - \mathbf{B}$ としたとき、 $\mathbf{D}$ と $\mathbf{E}$ の内積を求めよ．
3. $\mathbf{D}$ と $\mathbf{E}$ の外積を求めよ．
4. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C}$ を求めよ．

問 1.5-4 ベクトルの微分に関して、次の式が成り立つことを示せ．ただし、 $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ は時間に依存するベクトルである．

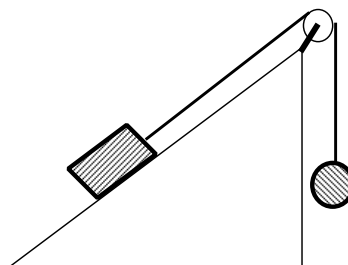
$$\frac{d}{dt} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \left(\frac{d}{dt} \mathbf{A} \right) \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \left(\frac{d}{dt} \mathbf{B} \right)$$

問 1.5-5 問題 1.1-1 の位置ベクトル $\mathbf{r}(t)$ と問題 1.2-2 の速度ベクトル $\mathbf{v}(t)$ を用いて, ある時刻 t における $\mathbf{x} = \mathbf{r}(t) + \mathbf{v}(t)\delta t$ を求めよ. 但し, $a = b$ としてよい. これと, $\mathbf{r}(t + \delta t)$ とを比較せよ.

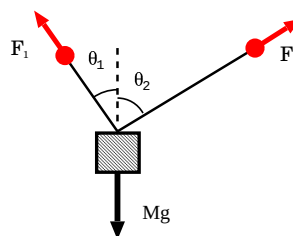
2 運動の3つの法則

2.1 第一の法則

問 2.1-1 図のように斜面上に置かれた物体が滑車を通じてひもでおもりとつながって静止している. この物体とおもりに働く力を列挙して, 力の方向を示せ.



問 2.1-2 図のように質量 M のおもりを二人で持ち上げて, 静止させている. 鉛直方向となす角をそれぞれ $\theta_1, \theta_2 (< \theta_1)$ になっている. どちらが楽をしている?



2.2 第二の法則

問 2.2-1 重力中の質点の運動は運動方程式を解くことによって決まる. 時刻 t における位置 $z(t)$ は, 鉛直上向きを正の方向として, $t = 0$ での位置を z_0 , 速度を v_0 とすると,

$$z(t) = z_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

と表される. ここで g は重力加速度である.

1. v_0 を正にする (つまり, 上向きに投げ上げた) と, 最高到達点を求めよ.
2. また, このとき, 再び $t = 0$ の位置 z_0 に戻って来たときの速度を求めよ.
3. 位置と速度を時間の関数として, グラフに描け. 上の結果はグラフから理解できるか?

問 2.2-2 上の式を利用して, 実際に重力加速度 g を測ってみよう.

問 2.2-3 西武の松坂のフォークがどのくらい落ちるのかを大雑把に見積もってみる。フォークボールはボールの回転がほとんどないので、回転による効果はなく、ほぼ自由落下と考えて良いとされている¹。

1. 初速度 135km/h で投げられたボールが等速直線運動しているとする、17m 離れたキャッチャーのミットに到着するまで何秒かかる？
2. その時間の間、鉛直方向には落下運動したとすると、どのくらい落ちるだろうか。重力加速度は 9.8m/s^2 とする。

問 2.2-4 質量 m の物体の x 方向の運動が次のように表されたとする。この物体に働いている力 (x 方向) を求めよ。

1. $x(t) = vt + \frac{1}{2}gt^2$
2. $x(t) = A \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}}t \right)$

2.3 質量と力の次元

問 2.3-1 振り子の周期 T (振り子が振れて戻って来るまでの時間) は、 $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ となる²。ただし、 l は振り子の長さであり、 g は重力加速度である。この式が次元として正しいことを示せ。

問 2.3-2 距離 r だけ離れた質量が M と m である二つの物体³に働く万有引力 F は

$$F = G \frac{Mm}{r^2}$$

で表される⁴。定数 G の次元を求めよ。

問 2.3-3 力積の次元を求めよ。

2.4 第三の法則と運動量保存則

問 2.4-1 身の回りで運動量が保存していることがわかる現象をあげよ。

問 2.4-2 静止しているサッカーボールを蹴っ飛ばして、30m/s の速度を与えた。ボールの質量は 0.5Kg であり、蹴る際に足に接触していた時間は 0.025 秒であった。足にかかる力は何の程度か見積もれ。

¹流体力学の効果などさまざまな効果は本当はあるが、それでも自由落下に非常に近いことが最近わかってきている

²この式の理由はそのうちに講義で解説する。

³例えば、太陽と地球等。

⁴これも講義で説明する。