

練習問題の解答例

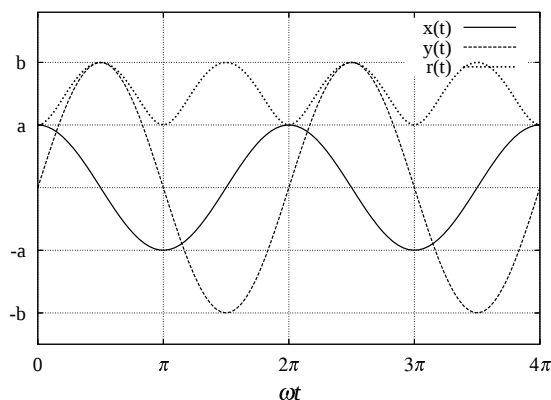
福島孝治 (東大院総合文化)

1 運動の記述

1.1 質点の位置ベクトル

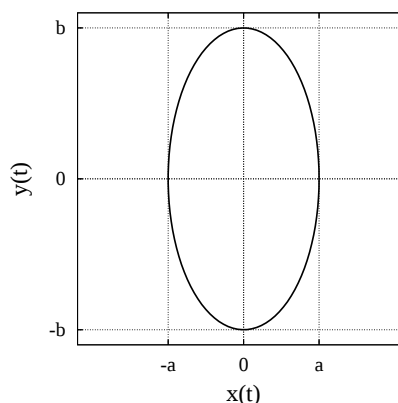
問 1.1-1

z 成分はなので、運動は xy 平面内で起こっている。時間の関数として、 x 座標、 y 座標をグラフに示してみる。横軸は ω を単位にとり、未定の定数 (a, b) は適当に設定することにした。 x, y 座標ともに周期 $\frac{2\pi}{\omega}$ で振動していることがわかる¹。



問 1.1-2

今度は、時間を媒介変数として、 xy 平面上に描いてみる。上のグラフから、時々刻々の点を繋げてみると、右のように楕円になる。



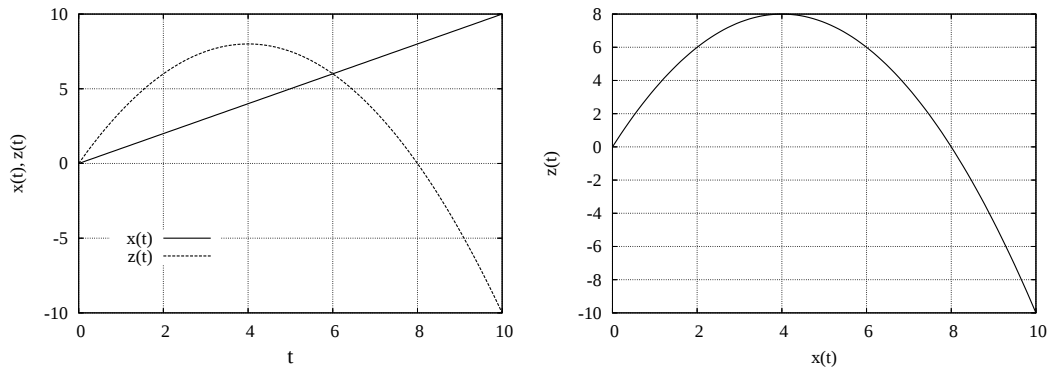
問 1.1-3 原点からの距離を $r(t)$ とすれば、

$$\begin{aligned} r(t) &= \left(a^2 \cos^2(\omega t) + b^2 \sin^2(\omega t) \right)^{1/2} = \left(a^2 + (b^2 - a^2) \sin^2(\omega t) \right)^{1/2} \\ &= \left[\frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{b^2 - a^2}{2} \cos(2\omega t) \right]^{1/2} \end{aligned}$$

¹ここで周期とは、ある関数 $f(t)$ がある一定間隔でピークをもつときのその間隔のことを呼ぶ。振幅が一定のときは、 $f(t) = f(t + T)$ が成り立つ T のうち最小のものを周期とする。

となることがわかる．これは a と b の間を周期 $\frac{\pi}{\omega}$ で振動する関数である．問 1-1-1 のグラフに $r(t)$ の結果も載せておいた．この関数の周期は $x(t)$ や $y(t)$ とは異なっていることは確認しておこう．

問 1.1-4 問題文では x , と y を書くことになっていたが , 正しくは y ではなくて , z 座標である . 上で行ったようなグラフを描いてみる . 但し , ここでは , $a = 1.$, $b = 4.$, $g = 1.$ とした .



どのような運動かが想像できるだろうか .

1.2 速度ベクトル

問 1.2-1 微分に関する以下の恒等式を示せ .

$$1. \quad \frac{d}{dx} x^n = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{(x + \epsilon)^n - x^n}{\epsilon} = nx^{n-1}$$

(ここで , 二項定理 $(x + \epsilon)^n = x^n + {}_nC_1 x^{n-1} \epsilon + {}_nC_2 x^{n-2} \epsilon^2 + \dots$ を用いた .)

2. (微分の合成則)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (f(x)g(x)) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \epsilon)g(x + \epsilon) - f(x)g(x)}{\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{f(x + \epsilon)g(x + \epsilon) - f(x)g(x + \epsilon)}{\epsilon} + \frac{f(x)g(x + \epsilon) - f(x)g(x)}{\epsilon} \right) \\ &= \left(\frac{d}{dx} f(x) \right) g(x) + f(x) \left(\frac{d}{dx} g(x) \right) \end{aligned}$$

$$3. \quad y'(x) = (-\alpha)e^{-\alpha x} .$$

²exp は指数関数のことである . この微分は高校のときにやったかな?例えば一つの方法として , 指数関数をべき級数の和で書いてみると ,

$$y'(x) = (e^{-\alpha x})' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\alpha x)^n}{n!} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\alpha)^n n x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\alpha)^n x^{n-1}}{(n-1)!} = (-\alpha) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^n x^n}{n!} = -\alpha e^{-\alpha x}$$

となることがわかる .

4. $y^{(n)}(x) = (-\alpha)^n e^{-\alpha x}$. ここで, $y^{(n)}(x)$ は関数 $y(x)$ を x で n 回微分したものと
する. この指数関数は何回微分しても自分自身 (の定数倍) にもどって来る性
質をもっている.

5. $y'(x) = \cos(x)^3$.

6. 3. の合成則を用いると,

$$y'(x) = (x^n)' \frac{1}{x+1} + x^n \left(\frac{1}{x+1} \right)' = \frac{nx^{n-1}}{1+x} + x^n \frac{(-1)}{(1+x)^2} = \frac{nx^{n-1} + x^n(n-1)}{(1+x)^2}$$

7. 上の微分の合成則を n 回微分に一般化すると,

$$\frac{d^n}{dx^n} (fg) = \sum_{m=0}^n {}_nC_m f^{(n-m)} g^{(m)}$$

となる⁴. ここで $f^{(m)}$ は f の x についての m 回微分を, ${}_nC_m$ はコンビネー
ションを表す. $f(x) = x^n$, $g(x) = (1+x)^{-1}$ とすると,

$$\frac{d^n}{dx^n} \frac{x^n}{1+x} = \sum_{m=0}^n {}_nC_m \frac{n!}{1+x} \left(\frac{-x}{1+x} \right)^m = \frac{n!}{1+x} \left(1 - \frac{x}{1+x} \right)^n = \frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$$

. 途中で任意の n に対して, 二項定理 $(x+y)^n = \sum_{m=0}^n {}_nC_m x^m y^{n-m}$ を使っ
ている.

問 1.2-2

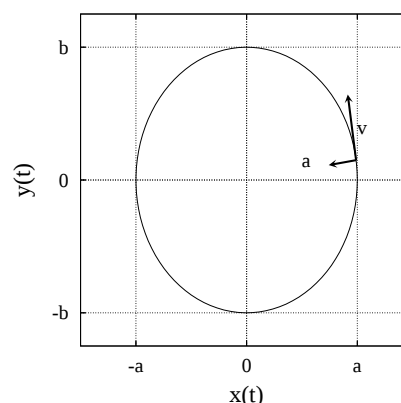
$$\mathbf{v} = (-a\omega \sin(\omega t), b\omega \cos(\omega t), 0)$$

1.3 加速度ベクトル

問 1.3-1

$$\mathbf{a} = (-a\omega^2 \cos(\omega t), -b\omega^2 \sin(\omega t), 0)$$

ある時刻の $\mathbf{v}$ と $\mathbf{a}$ を右図に示しておく.



問 1.3-2

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{a} = a^2 \omega^3 \sin(\omega t) \cos(\omega t) - b^2 \omega^3 \sin(\omega t) \cos(\omega t) = (a^2 - b^2) \omega^3 \sin(\omega t) \cos(\omega t)$$

³証明は一度くらいはやってみて, 後はこの式は覚えてしまいましょう. $\sin$ の和の公式[?] $\sin(x+y) - \sin(x-y) = 2 \cos x \sin y$ を使うと, $\sin(x+\epsilon) - \sin(x) = \sin(x+\epsilon/2+\epsilon/2) - \sin(x+\epsilon/2-\epsilon/2) = 2 \cos(x+\epsilon/2) \sin(\epsilon/2)$ となる. 微分の定義から,

$$(\sin x)' = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\sin(x+\epsilon) - \sin(x)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{2 \cos(x+\epsilon/2) \sin(\epsilon/2)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\cos(x+\epsilon/2) \sin(\epsilon/2)}{\epsilon/2} = \cos(x)$$

となる. 最後の等式はロピタルの定理を使う.

⁴これは帰納法で証明できる.

となる．加速度ベクトルは常に原点を向いていて，速度ベクトルは楕円の接線方向を向いている． $a = b$ の場合 (円運動) は常にゼロになるので，速度と加速度は直交しているが， $a \neq b$ の場合は二倍周期で振動する．

問 1.3-3 速度・加速度の x 成分はそれぞれ，

$$v(t) = x'(t) = gt, \quad a(t) = v'(t) = g$$

である．

問 1.3-4

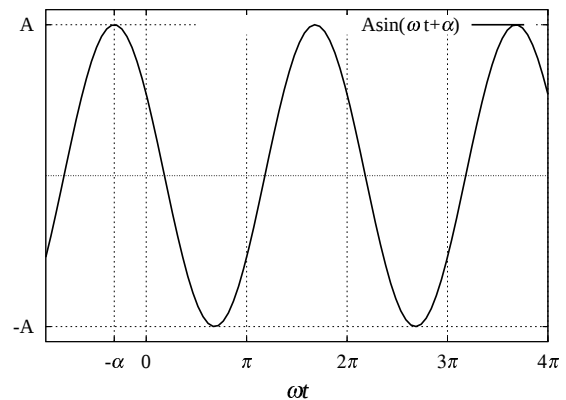
$x(t)$ のグラフを右図に示す．これも周期 $2\pi/\omega$ の振動だが，振動の原点が α だけずれていることに注意したい．

速度・加速度の x 成分はそれぞれ，

$$v(t) = A\omega \cos(\omega t + \alpha),$$

$$a(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t + \alpha)$$

である．



1.4 次元

問 1.4-1 講義で説明したように，長さと時間の次元をそれぞれ L, T とすると，[速度] $= L/T$, [加速度] $= L/T^2$ となる．

問 1.4-2 左辺と右辺の次元を勘定することにより，

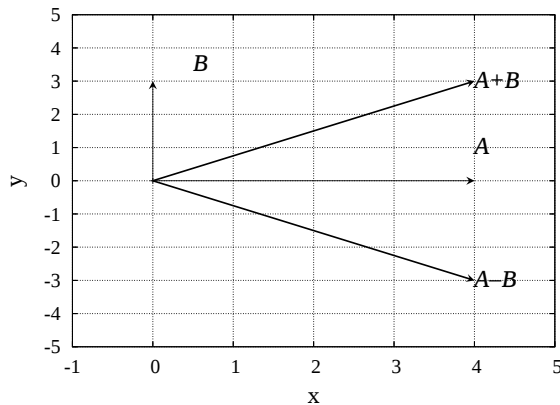
$$[a] = L, \quad [b] = L/T, \quad [c] = L/T^2$$

となることがわかる．例えば，位置が時間の関数として与えられたときに，それぞれの時間のべき関数の係数は，長さ，速度，加速度の次元を持つ．

1.5 ベクトルの演算

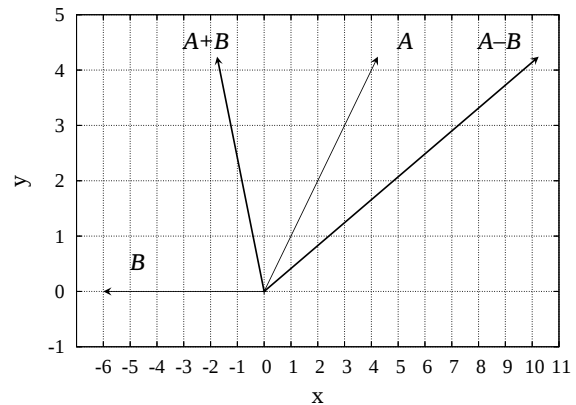
問 1.5-1

ベクトルの大きさは，共に 5 .



問 1.5-2

ベクトル A は $A = (3\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 0)$ であり，ベクトル B は $B = (-6, 0, 0)$. 大きさはそれぞれ $|A + B| = 6(2 - \sqrt{2})^{1/2}$, $|A - B| = 6(2 + \sqrt{2})^{1/2}$.



問 1.5-3 3 つのベクトルが与えられている . $A = (2, 3, -4)$, $B = (2, -2, 2)$, $C = (-1, 2, 1)$.

1. ベクトル B の大きさは， $|B| = \sqrt{3 \times 2^2} = 2\sqrt{3}$ なので，単位ベクトルは， $\frac{B}{|B|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$
2. $D = (4, 1, -2)$, $E = (2, 8, -10)$ なので， $D \cdot E = 8 + 8 + 20 = 36$.
3. D と E の外積を求める . $D \times E = (-10 + 16, -12 + 40, 32 - 6) = (6, 28, 26)$.
4. $A \cdot B \times C = (2, 3, -4) \cdot (-6, -4, 2) = -32$.

問 1.5-4 右辺の定義が左辺に等しいことを示します . まずは左辺から，

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(A \cdot B) &= \frac{d}{dt}(A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z) \\ &\text{それぞれの項に微分の合成則をあてはめればよい} \\ &= \left(\frac{d}{dt}A_x\right)B_x + A_x\left(\frac{d}{dt}B_x\right) + \left(\frac{d}{dt}A_y\right)B_y + A_y\left(\frac{d}{dt}B_y\right) + \\ &\quad \left(\frac{d}{dt}A_z\right)B_z + A_z\left(\frac{d}{dt}B_z\right) \\ &= \left(\frac{d}{dt}A\right) \cdot B + A \cdot \left(\frac{d}{dt}B\right) \end{aligned}$$

となる .

問 1.5-5 $a = b$ として ,

$$\boldsymbol{x} = (a \cos \omega t - a\omega \delta t \sin \omega t, a \sin \omega t + a\omega \delta t \cos \omega t, 0)$$

図では 1.3-1 で , 位置ベクトルと速度ベクトルを足せばよくて , その合計ベクトルは少しだけ時間が経過した $(t + \delta t)$ 位置ベクトルに近い .

捕捉:ベクトル積の方向と大きさ

任意の 2 つの 3 成分ベクトル A と B からベクトル積で作られるベクトル C の性質について考える .

方向 : このベクトル C の方向は , A と B に垂直であることがわかる . そのためには , $A \cdot C = B \cdot C = 0$ を示せばよい⁵ .

$$\begin{aligned} A \cdot C &= A \cdot (A \times B) = (A_x, A_y, A_z) \cdot (A_y B_z - A_z B_y, A_z B_x - A_x B_z, A_x B_y - A_y B_x) \\ &= A_x(A_y B_z - A_z B_y) + A_y(A_z B_x - A_x B_z) + A_z(A_x B_y - A_y B_x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

同様に $B \cdot C = 0$ も示される . 二つのベクトルに垂直な方向は唯一に決まる . つまり , ベクトル A と B で張られる面に対する法線方向である .

大きさ : 大きさを調べるためには次のベクトルの公式

$$(A \times B) \cdot (A \times B) = (A \cdot A)(B \cdot B) - (A \cdot B)^2$$

が便利である⁶ . これより , A, B をそれぞれ A, B の大きさ , θ を二つのベクトルのなす角として ,

$$|A \times B| = (A^2 B^2 - AB \cos^2 \theta)^{1/2} = AB \sin \theta \quad (1)$$

であることがわかる . これは図に描いてみるとわかるが , ちょうど A と B のできる平行四辺形の面積に等しい .

⁵内積は二つのベクトルのなす角を θ として , $A \cdot B = |A||B| \cos \theta$ と表せることに注意しよう . 2 つのベクトルが垂直のときは $\cos \pi/2 = 0$ である .

⁶これが成り立つことを証明せよ .