2. その間に垂直方向には自由落下しているとすると，垂直方向の初速度を 0 として，落下距離は，

$$z = \frac{1}{2}gt^2 = 0.5 \times 9.8 \times (0.45)^2 \simeq 1.00m$$

おおよそ 1m 落下していることになる．

問 2.2-4 ここでは運動がわかっているとして，力を求めてみることにする．x 方向の座標が与えられているので，そこから x 方向の加速度 $a_x(t)$ を求めてみる．

1.
$$v_x(t) = t + gt \quad \Longrightarrow \quad a_x(t) = g$$

   このとき，$F_x = mg$ となり，x 方向に一定の力が働いていることになる．

2.
$$v_x(t) = A\sqrt{\frac{k}{m}}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \quad \Longrightarrow \quad a_x(t) = -A\frac{k}{m}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

   この質点に働く力は $F_x = -Ak\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) = -kx$ である．これは位置に比例して，逆向きの力である．原点から離れる程に原点方向に引き戻そうとする力が大きくなるわけである．これはバネ運動を表している．

2.3 質量と力の次元

問 2.3-1 左辺の次元は時間 T である．一方で，右辺は，

$$[\sqrt{l/g}] = \sqrt{[L/(L/T^2)]} = \sqrt{[T^2]} = T$$

となり，右辺も T となり，等式が成り立っている．

問 2.3-2 これは力の次元なので，$[MLT^{-2}]$ である．次元の式を書いてみると，

$$MLT^{-2} = [G]\frac{M^2}{L^2} \to [G] = \frac{L^3}{M}T^{-2}$$

となる．

問 2.3-3 力積は運動量の次元と同じであるので，$[p] = [mv] = MLT^{-1}$．一方で，力積 I の定義は，

$$I = \int F dt$$

であることから考えると，力×時間の次元を持っていることがわかる．このことを確かめてみると，

$$[F][t] = MLT^{-2} \times T = MLT^{-1}$$

となり，やはり，上の次元と同じであることがわかる．

2.4　第三の法則と運動量保存則

問 2.4-1 これは例えば講義で見せた衝突振り子の運動がある．同様なものでは，例えばおはじきがそうである．机の上の摩擦が大きくて，わかりにくいところもあるが，衝突の際に運動量が保存している．摩擦がない例といえば，冬のオリンピックで話題になったカーリングがある．全く摩擦がないわけではないが...

問 2.4-2 これは力の方向の分解を考える問題であり，さらに力の大きさやつ力積についての感覚を養う練習にもなっている．

1. まず，初速 30m/s がどの程度かを見ておく．地面に置いてあるボールを角度 30°上方へ蹴り上げたとする．ボールは一様重力中を運動する，つまり放物運動するとする．このとき，どのくらい前方へ進んだかを考えてみる．

初速度の水平成分 V_{x0} と鉛直成分 V_{z0} を求めておく．

$$\begin{aligned} V_{x0} &= V_0 \cos\frac{\pi}{6} = 30\mathrm{m/s} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \simeq 26.0\mathrm{m/s} \\ V_{z0} &= V_0 \sin\frac{\pi}{6} = 30\mathrm{m/s} \times \frac{1}{2} = 15\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

鉛直方向の運動を考えると，地面 $(z = 0)$ に置いたボールを初速 V_{z0} で蹴り上げ，時刻 t の時の位置 z は，$z = v_{z0}t - \frac{1}{2}gt^2$ であり，再び地面に戻って来る時間を t_1 とすると，$0 = v_{z0}t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2$ となる．これを解き，重力加速度を 9.8m/s^2 として，

$$t_1 = 2\frac{v_{z0}}{g} \simeq 2 \times \frac{15}{9.8}\frac{\mathrm{m/s}}{\mathrm{m/s^2}} \simeq 3.1\mathrm{s}$$

となる．この間に水平方向を進んだ距離 x は，

$$x = v_{x0}t_1 \simeq 26.0 \times 3.1 = 81\mathrm{m}$$

である．

W 杯等の標準国際試合で使用されるサッカーの競技場の大きさは，縦１０５m×横６８mとなっている．ゴールキックだとすれば，相手ゴールの近くまで飛んでいることになる．この問題のキッカーはプロ級であろう．

2. 次のこのキックの際の足にかかる力を考える．このキックについての力積[7]の大きさ I は，

$$I = mV_0 - m0 = 0.5 \times 30\mathrm{Kg\ m/s} = 15\mathrm{Kg\ m/s}$$

蹴っている途中の力のかかり具合は正確には分らないが，接触時間 Δt は短く，その間一様な力 $\bar{F}$ で蹴っていたと仮定すると，

$$\bar{F} = \frac{I}{\Delta t} = \frac{15}{0.025}\frac{\mathrm{Kg\ m/s}}{\mathrm{s}} = 600\mathrm{Kg\ m/s^2}$$

[7] 力積はベクトル量であるが，ここではその大きさを求めてみる．例えば，ベクトル量として力積を求め，すなわち I_x と I_z を求めてみて，その大きさ $I = \sqrt{I_x^2 + I_z^2}$ を求めるとどうなるか?

3. 最後に，この力は日常生活でどのくらいの重さのものを持ち上げる力に相当するか考えてみる．質量 M の物体にかかる重力は，Mg であるので，先ほどの力に相当する質量は，

$$M = \frac{600}{9.8} \simeq 61\mathrm{Kg}$$

である．大人の男性を抱えるくらいの力で蹴っていることがわかる．これは相当の力である．ゴール近くまでトンで行くのも納得できる．

一方で，例えば足の力が弱くて，半分くらいの力しかない選手は，倍の接触時間をかけて蹴るテクニックがあれば，同じくらいの力積，つまりは同じくらいの飛距離が出る．

- not so Frequently Asked Questions (1)-

ある時刻 t での位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t)$ と速度ベクトル $\boldsymbol{v}(t)$ から，時刻 $t+\Delta t$ での位置ベクトルは，

$$\boldsymbol{r}(t+\Delta t) = \boldsymbol{r}(t) + \frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}\Delta t + O(\Delta t^2) \tag{2}$$

と書ける．

1. (a) $O(\Delta t^2)$ って何?
2. (b) そもそもこの式はどこからやってきた?

(a) は，大きさが Δt^2(とそれよりも高次を含む) 項をざっくり表している．読み方は，オーダー (order) である．これは，Δt は小さいとしたときに，Δt の１次式のレベルで等式が成り立っていることを表したい時に用いられる．そういう意味での近似ということだが，近似だと「=」を使うことは数学的にはできないから，残りの部分を記号 O の中に全て押し込んでいると考えている．具体的な例は次にみることにしよう．

(b) 具体的に式 (1) を求めてみることにする．簡単のためにスカラー関数 $f(x)$ の $x=x_0$ 近傍の場合の展開式,

$$f(x_0+\epsilon) = f(x_0) + \left.\frac{d}{dx}f(x)\right|_{x=x_0} \epsilon + \cdots$$

の出処について考える[8]．ある x の区間について，一般に関数 $f(x)$ が $(x-x_0)$ の多項式で書けるとする．

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \tag{3}$$

ここで，逐次的に $x-x_0$ の n 次の係数 a_n を求めることを考える．

1. $x=x_0$ と置くことで，$f(x_0)=a_0$

[8] ここで，右辺第二項の $\left.\frac{d}{dx}f(x)\right|_{x=x_0}$ は $f(x)$ を x で微分をとった後に $x=x_0$ を代入することを意味している．つまり，$x=x_0$ での関数 $f(x)$ の微係数のことである．簡単に $f^{'}(x_0)$ と書くこともある．

2. 一回微分してから $x = x_0, \longrightarrow \frac{d}{dx}f(x)\Big|_{x=x_0} = f'(x_0) = a_1$
3. 同様に n 回微分してから $x = x_0, \longrightarrow \frac{d^n}{dx^n}f(x)\Big|_{x=x_0} = f^{(n)}(x_0) = n!a_n$

これから $\Longrightarrow f(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots = \sum_m^{\infty} \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m$ とかける.

$x - x_0 \ll 1$ のとき

$$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2$$

を関数 $f(x)$ の $(x - x_0)^2$ のオーダーでの近似という．これを上の記号 O を使って,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + O\left((x - x_0)^3\right)$$

と表す． 特に $x_0 = 0$ の近傍での関数の近似の例を示す.

1. $\exp(x) = 1 + x + x^2/2 + x^3/3!+$
2. $\exp(ix) = 1+(ix)+(ix)^2/2+(ix)^3/3!+\cdots = (1-x^2/2+x^4/4!+\cdots)+i(x-x^3/3!+\cdots)$
3. $\cos(x) = 1 - x^2/2 + x^4/4! + \cdots$
4. $\sin(x) = x - x^3/3! + \cdots$

これらの式が正しいかどうかを示してみよう.

また，電卓を叩いて，近似の各オーダーでどの程度数値的に合っているかを確かめてみるのはいいかもしれない.

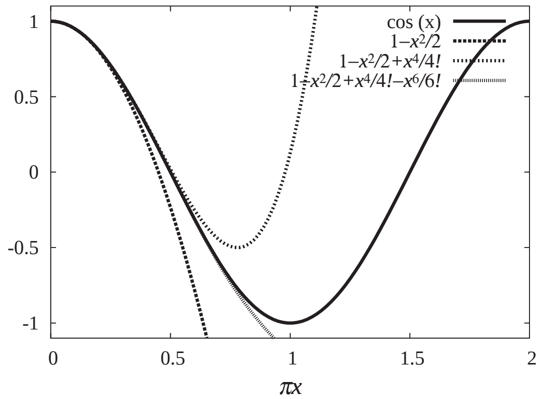

図 1: $f(x) = \cos(x)$ の場合の例を元の関数と 3 次の多項式で表した場合の式をグラフに描いてみる.

例えば，力積のときには積分で与えられる関数 $f(x)$ の展開を考えた．$x = x_1$ の周りで展開が次のようになることを確認してほしい.

$$f(x) = \int_{x_0}^{x} dx'F(x') = \int_{x_0}^{x_1} dx'F(x') + F(x_1)(x - x_1) + \frac{1}{2}F'(x_1)(x - x_1)^2 + \cdots$$