3　運動方程式の解法

3.1　放物運動

問 3.1-1 **射的問題**：図 1 のように，鉄砲は的に照準をあわせておき，的が落下すると**同時**に鉄砲を発射する．このとき，球の発射速度 v_0 がある条件を満たすときに，必ず命中することを示せ．またその条件が満たさないときに起きることを説明せよ．

問 3.1-2(意外とちょっと難しい) **雪合戦?**：図 2 のように高さ h の壁から l だけ離れた左の位置に球を投げる人がいる．その人の能力で，球は初速度 v_0 でいつも投げることができる．ただし，方向は自由に調整できるとする．壁の右に隠れている人にとって，必ず球が到達しない領域はあるか?それはどこか?

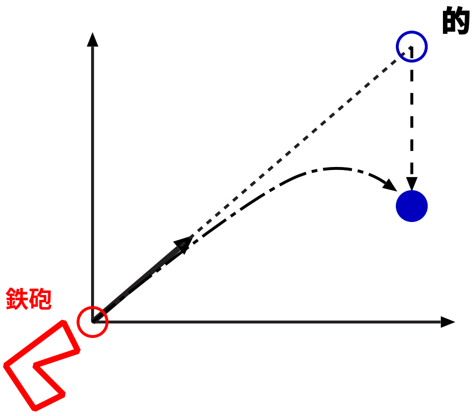

図 1:

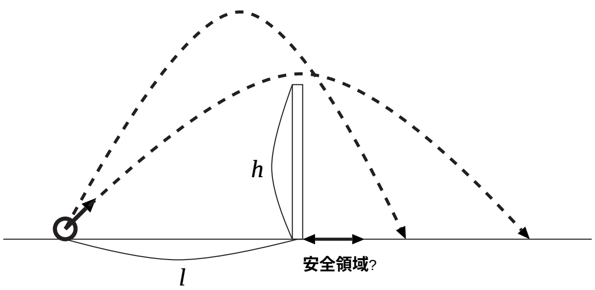

図 2:

問 3.1-おまけ 自然長からののびに比例する復元力が働くバネがある．このバネを特撮物のロボットにつけたときに不自然に見えない条件を考える．時間と空間の縮尺を変えたときに運動方程式が不変になるための条件を述べよ．その条件の意味を解説せよ．

3.2　微分方程式のいくつかの解法

問 3.2-1　次の微分方程式を解け．

$$(1)\quad \frac{d}{dx}y = 1+y^2, \qquad (2)\quad \frac{d}{dx}y = \frac{y^2+1}{x^2+1}, \qquad (3)\quad \frac{d}{dx}y = \left(\frac{y+1}{x+1}\right)^2$$

問 3.2-2　次の微分方程式を解け．

1. $\frac{d}{dx}y = \frac{y-x+2}{y-x+4}$　$(u = y - x$ とおくとよい$)$,

2. $\frac{d}{dx}y = \frac{y-\sqrt{x^2+y^2}}{x} \quad (u = y/x)$

問 3.2-3 次の 2 階の微分方程式を解け.

1. $y'' + 5y' + 6y = 0$
2. $y'' + 2y' + 3y = 0$
3. $y'' + 6y' + 9y = 0$

問 3.2-4 初期条件として，$x(t=0) = 2, x'(0) = 7$ を満たす微分方程式の解を求めよ.

$$\frac{d^2}{dt^2}x - 4\frac{d}{dt}x + 7x = 0$$

問 3.2-4 ある時刻 t における人口を x とすると，人口の変化率 (dx/dt) を

$$\frac{d}{dt}x = -kx(x - A)$$

とする人口増減モデルを考える．ここで，k, A は時間によらない定数とする.

1. この微分方程式を解け.
2. 時間の関数として，このモデルの解をプロットしてみよ.
3. 定数 $k,\ A$ が何に相当するか説明せよ.

3.3 抵抗があるときの落下運動

問 3.3-1 人が飛行機より初速 v_0 で飛び降り，t_0 秒後にパラシュートを開いた．落下中は，速度に比例した空気抵抗が働くとする．人間の抵抗係数を κ_1，パラシュートを開いたときの抵抗係数を κ_2 として，それぞれのときの運動方程式は，抵抗係数 κ を用いて，

$$m\frac{d^2}{dt^2}z = -mg - \kappa\left(\frac{d}{dt}z\right)$$

と表せる．時刻を t_0 前後に場合分けをして，この運動方程式を解け．但し，$t = t_0$ の時には 2 つの解は接続していること．また，速度のグラフを描いてみよ.

問 3.3-2 流体とぶつかることによって生じる抵抗力 (慣性抵抗) は，速度の二乗に比例する．そのときの落下運動の運動方程式は，

$$m\frac{d^2}{dt^2}z = -mg + k\left(\frac{d}{dt}z\right)^2 \tag{1}$$

となる．m は質点の質量，g は重力加速度，$k > 0$ は抵抗係数である．初速度を 0 として，この落下運動を調べよ.

3.4　ばねの振動

問 3.4-1 直線上を運動する質量 m の質点に，原点からの距離 x に比例する引力と，速度に比例する抵抗力が働いているとき，運動方程式は，

$$m\frac{d^2}{dt^2}x = -k\frac{d}{dt}x - \kappa x, \qquad (k > 0, \kappa > 0)$$

となる．

1. 初期条件として，$t = 0$ のとき，$x = 0, dx/dt = v_0$ の解を求めよ．
2. 周期はどのようになっているか?
3. 振幅はどうなっているか?

4　仕事とエネルギー

4.1　仕事と運動エネルギー

問 4.1-1：「仕事の次元」 仕事の次元を求めよ．

問 4.1-2：「斜面の落下」

右図のように水平面と角度 θ をなす斜面上の地面からの高さ h の位置に質量 m の物体が置かれている．

1. 斜面はなめらかとして，地面に到達するまでに重力が質点にする仕事を求めよ．
2. 地面からの高さ h は一定として，斜面の角度を変化させたときに，この仕事はどうなるかを答えよ．

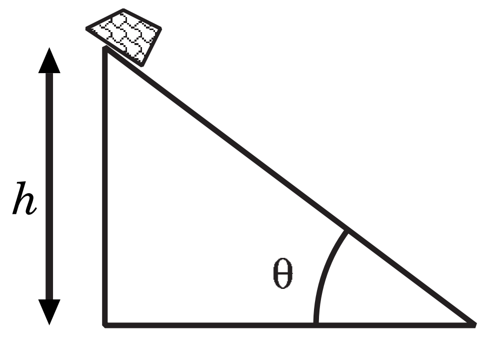

図 3:

問 4.1-3：「振り子の仕事」 振り子の運動について考える．振り子に働く力は，重力，振り子を支える糸の張力，および空気の抵抗である．以下の問に理由とともに答えよ．

1. これらのうちに，振り子に仕事をするのはどれか?
2. そのうちに常に負の仕事をするのはどれか?

問 4.1-4：「減衰振動の仕事」 練習問題 問 3.4-1 の運動で，質点に働く力のする仕事について考える．

1. 一周期の間にばねの引力がする仕事を求めよ．
2. 一周期の間に抵抗力がする仕事を求めよ．

問 4.1-5：**「摩擦力のする仕事」** 車輪のついた椅子を押して，これに初速 $v_0 = 2\mathrm{m/s}$ を与える．この椅子は地面との間の摩擦力を受けて減速し，やがて静止した．

一般に運動している物体に働く摩擦力は，運動方向と反対向きに大きさは垂直抗力に比例する．比例係数を動摩擦係数と呼ぶ．垂直抗力とは地面が物体を押している地面と垂直方向の力のことでである．地面と椅子の動摩擦係数は 0.8 とする．

1. 仕事と運動エネルギーの関係を使って，椅子が静止するまでに運動する距離を求めよ．
2. 初速を二倍にすると，静止する距離は何倍になるか?

4.2 保存力と力学的エネルギー保存則

問 4.2-1 次の保存力について，ポテンシャルエネルギーを求めよ．積分定数は適当に設定せよ．

1. ばねの弾性力
2. 一様な重力

問 4.2-2 原点にある質量 M の質点と位置 (x, y, z) にある質量 m の質点の間に働く万有引力のポテンシャル $U(x, y, z)$ は，万有引力定数を G として，

$$U(x, y, z) = G\frac{Mm}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

で与えられる．2つの質点間働く力 $\boldsymbol{F} = (F_x, F_y, F_z)$ を求めよ．

問 4.2-3 エネルギー保存則の別の証明を考える．質量 m の質点の速度を $\boldsymbol{v}$ として，位置$\boldsymbol{x}$でのポテンシャルエネルギーを $U(\boldsymbol{x})$ とする．この質点の力学的エネルギー E は，

$$E = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2 + U(\boldsymbol{x})$$

とする．このとき，力学的エネルギー保存則，すなわち，$\frac{d}{dt}E = 0$ を示せ．

問 4.2-4 速度に比例する抵抗がある場合の落下運動を考える．簡単のために，鉛直方向の運動しか考えないとする．初速度 $v_0 = 0$ とする．

1. 時刻 t での質点の運動エネルギー $K(t)$ を求めよ．
2. 時刻 t での重力による位置エネルギーを $U(t)$ を求めよ．