

3.3 抵抗があるときの落下運動

問 3.3-1

これはレポート問題なので、後で解答する。

問 3.3-2

この問題の趣旨は、線形でない微分方程式の解き方と、粘性抵抗中の落下運動との違いを調べることである。

この問題では抵抗係数 $k > 0$ として、落下運動に限定している¹⁴。この運動方程式は右辺の第二項に $v_z = dz/dt$ の二乗の項を含んでいて、もはや線形ではない¹⁵。これは非線形微分方程式である。初期条件は、時刻 $t = 0$ で、位置 $z = 0$ 、速度 $v = 0$ とする。解くべき方程式は、

$$\frac{d^2}{dt^2}z = -g + \frac{k}{m} \left(\frac{d}{dt}z \right)^2 \quad (15)$$

これは一度速度 v の満たす方程式に書き直すと、変数分離の形をしている。

$$\frac{d}{dt}v = -g + \frac{k}{m}v^2 \quad (16)$$

$$\int_0^v dv' \frac{1}{g - \frac{k}{m}v'^2} = \int_0^t dt' (-1) \quad (17)$$

↓ $mg/k = A^2$ とおくと、左辺の被積分関数は、

$$\downarrow \frac{1}{g - \frac{k}{m}v^2} = \frac{1}{\frac{k}{m}(A^2 - v^2)} = \frac{m}{k} \frac{1}{2A} \left(\frac{1}{A+v} + \frac{1}{A-v} \right)$$

↓ 両辺の積分する。

$$\frac{m}{2Ak} [\log(A+v') - \log(A-v')] \Big|_0^v = \frac{m}{2Ak} \log \left(\frac{A+v}{A-v} \right) = -t \quad (18)$$

v について解く。

$$\frac{A+v}{A-v} = \exp \left[-\frac{2Ak}{m}t \right] \Rightarrow v = -A \frac{1 - \exp(-2\frac{Ak}{m}t)}{1 + \exp(-2\frac{Ak}{m}t)} = -\sqrt{\frac{mg}{k}} \tanh \left(\sqrt{\frac{kg}{m}}t \right). \quad (19)$$

もう一度積分をすることで位置 z に時間発展が得られる。

$$\begin{aligned} \int_0^z dz' &= -\sqrt{\frac{mg}{k}} \int_0^t dt' \tanh \left(\sqrt{\frac{kg}{m}}t' \right). \\ z(t) &= -\sqrt{\frac{mg}{k}} \int_0^t dt' \frac{1}{\sqrt{\frac{kg}{m}}} \frac{d}{dt'} \log \cosh \left(\sqrt{\frac{kg}{m}}t' \right). \\ &= -\frac{m}{k} \log \cosh \left(\sqrt{\frac{kg}{m}}t' \right) \Big|_0^t = -\frac{m}{k} \log \cosh \left(\sqrt{\frac{kg}{m}}t \right) \end{aligned} \quad (20)$$

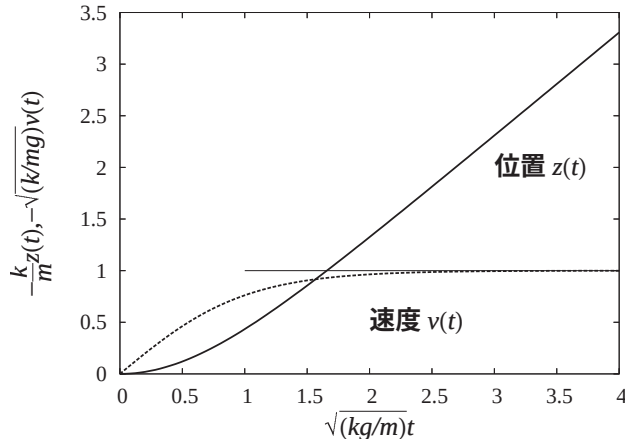


図 3: 位置と速度を時間の関数として描いてみる．縦軸と横軸は適当な変数で規格化している．

幾つかの特徴的な性質を見ておく．

終端速度: 終端速度 v^* は運動方程式の釣り合いの条件からすぐわかる．終端速度では速度の変化はもはやないので，左辺は 0 になる．これは右辺の力が釣り合っていることをいみする．右辺=0 を解くことで，**末端速度の大きさ (向きは下向き)** $v^* = \sqrt{\frac{mg}{k}}$ がわかる．以下ではすぐわかることを見てみる．

特徴的な時間: 終端速度への近付き方からわかるように，この運動の特徴的な時間¹⁶ τ は， $\tau = \sqrt{m/kg}$ になっている．

時間が長い極限 ($t \gg \tau$): この極限では， $\log \cosh(\alpha t) = \log \frac{e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}}{2} \simeq \log(\exp(\alpha t)/2) \simeq \alpha t$ なので，

$$z(t) \simeq -\frac{m}{k} \sqrt{\frac{kg}{m}} t = -v^* t \quad (21)$$

終端速度での等速運動になっていることがわかる．

時間が短い極限 ($t \ll \tau$): 時間 t が小さいとして，展開する．

$$\begin{aligned} \cosh \alpha t &\simeq 1 + \frac{1}{2}(\alpha t)^2 + \frac{1}{4!}(\alpha t)^4 + O(t^6) \\ \log \cosh(\alpha t) &\simeq \log' \left(1 + \frac{1}{2}(\alpha t)^2 \right) \simeq \frac{1}{2} \alpha^2 t^2 \end{aligned} \quad (22)$$

¹⁴ 上昇する場合は $k < 0$ になる．

¹⁵ 微分方程式の 2 つの解 z_1 と z_2 を持ってきたとき，それらの線形結合 $z = C_1 z_1 + C_2 z_2$ もまたその解になっているときに，その方程式は線形という．

¹⁶ **ここで特徴的な時間とは，終端速度へ近づく目安となる時間スケールのことで，例えば指数関数 ($e^{-t/\tau}$) の時に時間の次元を持つ量 τ のことである．式 (20) では， $\log \cosh(\frac{t}{\tau})$ と書いたときの τ に相当する．**

を使う¹⁷と,

$$z(t) \simeq -\frac{m}{k} \frac{1}{2} \left(\frac{kg}{m} \right) t^2 = -\frac{1}{2} g t^2 \quad (23)$$

これは自由落下を意味している. これも当たり前. 初期条件は速度 0 なので, 速度の二乗に比例する抵抗力は運動の初期には影響は少ない.

位置と速度の関係だけが知りたい場合はもう少し簡単になる. 微分の公式から, 速度の時間微分 dv/dt は,

$$\frac{d}{dt} v(t) = \frac{dz}{dt} \frac{d}{dz} v(z) = v(z) \frac{d}{dz} v(z) \quad (24)$$

となるから, この式を代入すると速度 v の微分方程式 (16) は,

$$v \frac{d}{dz} v = -g + \frac{k}{m} v^2 \quad (25)$$

となる. この式もまた変数分離形になっているので,

$$\frac{v}{g - \frac{k}{m} v^2} dv = -dz \quad (26)$$

から積分すればよい. この先はみなさんへの宿題として残しておく.

3.4 バネの振動

問 3.4-1

問題の趣旨: 2 階の線形微分方程式を解いてみようということです. これは, バネの振動の問題と, 速度に比例する抵抗の問題の合わせ技で, 特性方程式を用いて解くときに, 幾つかの状況が出て来る. また, 問題では陽に初期条件を与えなかったのも, そこは自分で適当に設定し, 答えを図にすることが出来るかも課題である.

この運動方程式の両辺を m で割り移行することで,

$$\frac{d^2}{dt^2} x + \mu \frac{d}{dt} x + \omega^2 x = 0 \quad (27)$$

が出て来る. ただし, $\mu = \kappa/m$, $\omega^2 = k/m$ である. この微分方程式の特性方程式は,

$$\lambda^2 + \mu\lambda + \omega^2 = 0 \quad (28)$$

である. 一般解はその根の性質で分類される.

¹⁷ $\log(1+x) = x - x^2/2 + O(x^3)$

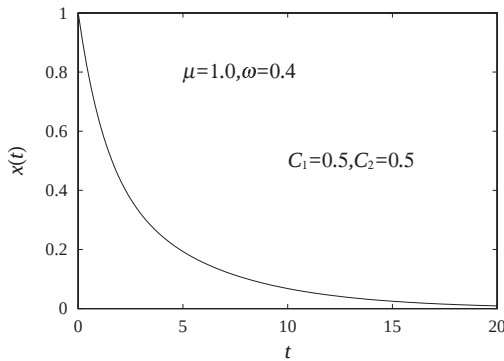


図 4: (i) の場合: 振動系の問題なのに振動しないのはなぜかという質問があったが, ここではとても摩擦が大きい状況に相当している。

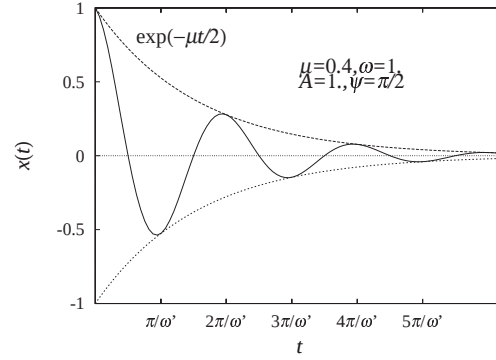


図 5: (ii) の場合: 振動の周期がよくわかるように横軸のスケールを書いておく必要がある。たまに周期がどんどん早くなっているようなグラフがあった。振幅が減衰するので, 周期が早くなるような感じがするかもしれないが, それは誤解である。周期はいつでも一定。

(i) $\mu^2 - 4\omega^2 > 0$: 抵抗力が大きい場合

このとき特性方程式の根は, α, β をそれぞれ

$$\alpha = \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - 4\omega^2}}{2} \quad \beta = \frac{\mu - \sqrt{\mu^2 - 4\omega^2}}{2} \quad (29)$$

としたときに, 相異なる 2 つの**負根** $-\alpha, -\beta$ ($\alpha > 0, \beta > 0$) をもつ。一般解は,

$$x(t) = C_1 \exp(-\alpha t) + C_2 \exp(-\beta t) \quad (30)$$

であり, 根がどちらも負であることから, 長時間極限では平衡点に収束する ($\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$)¹⁸. $x(t)$ が単調減少かどうかは初期条件に依存する。バネがのびる方向に初速度をもって引っ張れば一度伸びてから縮む。ただし, その場合でも $x(t) = 0$ を横切ることはない。

(ii) $\mu^2 - 4\omega^2 < 0$: バネ定数が大きい場合

特性方程式の根は虚数 $-\mu/2 \pm i\omega'$ になるから, 一般解は,

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\mu/2 t} (C_1 \exp(i\omega' t) + C_2 \exp(-i\omega' t)) \\ &= e^{-\mu/2 t} ((C_1 + C_2) \cos(\omega' t) + i(C_1 - C_2) \sin(\omega' t)) \\ &= A e^{-\mu t/2} \sin(\omega' t + \psi) \end{aligned} \quad (31)$$

である。ここで, $\omega' = \sqrt{4\omega^2 - \mu^2}/2$ であり, A, ψ は C_1, C_2 から決まる定数である。単振動と比べると, 振幅は指数関数的 $\exp(-\mu t/2)$ に減少し, 角振動数が ω から ω'

¹⁸ たびたび見掛けた解答に「非周期的運動」とか「振動しない」とかがあった。これは説明になっていないのではないかな。振動しない, 非周期的運動ってとても沢山あって, 運動を特定していない。 α, β が共に負であることを明示することは大切で, そうでないと, 発散する可能性もある。一度はグラフで示してみるといろいろとわかる。