

第一回物理学Bレポート問題の解答例

問題 1 「ベクトル演算 1」:

問題の趣旨: この問題はとにかく手を動かしてベクトル演算になれてもらうことが趣旨でした.

1. 定義どおりに計算してみる. まず

$$B \times C = (3 - 8, -4 - 2, -4 - 3) = (-5, -6, -7)$$

であり, 求めたい式は,

$$A \cdot B \times C = -10 - 21 = -31$$

となる.

2. これも問題どおりに代入して計算する.

$$(A \times B) \times C = (-9, -14, 6) \times C = (26, 15, 4)$$

3. ここでは一般的に $|A \cdot (B \times C)|$ が平行六面体の体積になることを示そう. まず, ベクトル $B \times C$ を D とおくと, ベクトル D の方向は B と C に垂直で, 大きさはその 2 つのベクトルで書かれる平行四辺形の面積である. 向きは講義でも話したので, ここでは大きさ $|B \times C|$ について, 調べておこう. そのためには次のベクトルの公式,

$$(B \times C) \cdot (B \times C) = |B|^2 |C|^2 - (B \cdot C)^2$$

を使うとよい^c. これを使うと,

$$|D| = \sqrt{B^2 C^2 - B^2 C^2 \cos^2 \phi} = BC \sin \phi = B(C \sin \phi)$$

となることがわかる. ここで ϕ は B と C のなす角であり, B の大きさを簡単に B と書いた. 図に書いてみるとわかるが, これはちょうど B と C でできる平行四辺形の面積に等しい.

この D と A との内積は, 2 つのベクトルのなす角を θ とすると, $A \cdot D = |A| |D| \cos \theta$ と書ける. $A \cos \theta$ は D への射影であるから, 平行四辺形に対する高さである. 結局, $A \cdot D$ は平行六面体の体積であることがわかる.

問題 2 「ベクトルの微分」:

問題の趣旨: この問題は微分の復習が趣旨です.

^c証明せよ.

これはベクトルの恒等式なので，右辺の x 成分の定義が左辺にそれに等しいことを示す．
 先ずは左辺から，

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_x &= \frac{d}{dt}(A_y B_z - A_z B_y) \\ &\text{それぞれの項に微分の合成則をあてはめればよい} \\ &= \left(\frac{d}{dt}A_y\right)B_z + A_y\left(\frac{d}{dt}B_z\right) - \left\{\left(\frac{d}{dt}A_z\right)B_y + A_z\left(\frac{d}{dt}B_y\right)\right\} \\ &= \left(\frac{d}{dt}A_y\right)B_z - \left(\frac{d}{dt}A_z\right)B_y + \left\{A_y\left(\frac{d}{dt}B_z\right) - A_z\left(\frac{d}{dt}B_y\right)\right\} \\ &= \left(\left(\frac{d}{dt}\mathbf{A}\right) \times \mathbf{B}\right)_x + \left(\mathbf{A} \cdot \left(\frac{d}{dt}\mathbf{B}\right)\right)_x\end{aligned}$$

となる． y 成分， z 成分についても同様に示すことができる．

おまけ：これはベクトルの恒等式だが，この関係式は物理の問題として面白い側面を持っている．2つのベクトルをそれぞれ $\mathbf{A} = \mathbf{r}$ ， $\mathbf{B} = \mathbf{p}$ とする．ここで， $\mathbf{r}$ は位置ベクトルであり， $\mathbf{p}$ は運動量ベクトルである．このときに上の関係式を用いると，

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) &= \left(\frac{d}{dt}\mathbf{r}\right) \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \left(\frac{d}{dt}\mathbf{p}\right) \\ &\text{ここで，}\frac{d}{dt}\mathbf{r} = \frac{\mathbf{p}}{m}\text{ は}\mathbf{p}\text{に平行であり，第一項はゼロになる}^{\text{d}}． \\ &\text{また，第二項に運動方程式}\frac{d}{dt}\mathbf{p} = \mathbf{F}\text{を用いると} \\ &= \mathbf{r} \times \mathbf{F}\end{aligned}$$

ここで， $\mathbf{F}$ が $\mathbf{r}$ に平行な力だと右辺はゼロになる^e．例えば，万有引力や電気力であるクーロン力はこのような例である．このとき，この式は運動量の保存則と似たような式になり， $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$ なる量が時間に依存しない，つまり保存することがわかる．この量は角運動量と呼ばれる量であり，これは角運動量の保存則と呼ばれる法則である．万有引力の法則に従う力の働く質点はこの角運動量が保存している．ケプラーの第二法則は面積速度一定の法則と呼ばれているが，実は面積速度がこの角運動量に比例している．このことから，ケプラーの第二法則のような運動には万有引力が働いていると考えることが自然であることがわかる．

問題 3 「力？」:

問題の趣旨：この問題は運動の軌跡と力の関係を認識することが趣旨です．

^d2つの互いに平行なベクトル同士のベクトル積はゼロである．

^eこの条件の満たす力は特に中心力と呼ばれる．

この運動は $-y$ 方向に重力が働いている落下運動である． $v > 0$ であるとして，位置ベクトルの各成分をそれぞれ $x(t), y(t), z(t)$ とすると，

$$y(t) = vt - \frac{1}{2}gt^2 = x - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v}\right)^2 = -\frac{g}{2v^2}\left(x - \frac{v^2}{g}\right)^2 + \frac{v^2}{2g}$$

となり，確かに二次曲線，すなわち放物運動であることがわかる．

1-(a) 速度ベクトルを求めると，

$$\mathbf{v}(t) = (v, v - gt, 0)$$

であり，その大きさは，

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v^2 + (v - gt)^2}$$

となる．この大きさが最小になるのは， $v - gt = 0$ になるときである．求める t_1 はこれを解いて，

$$t_1 = \frac{v}{g}$$

である．さて，この時刻 t_1 は速度の y 成分が 0，すなわち正から負になるときのなので，ちょうど最高到達点であることがわかる．そのときに速度は時間に依存しない x 成分だけになる．とてももったもな結果である．

1-(b) 加速度ベクトル $\mathbf{a}$ は

$$\mathbf{a} = \frac{d}{dt}\mathbf{v} = (0, -g, 0)$$

である．質量は m なので，ニュートンの第二法則より，力ベクトル $\mathbf{F}$ は

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = (0, -mg, 0)$$

となる．この放物運動を導く力は y 方向に時間に依存しない力が働いているのであった．力はベクトルであることに注意されたい．

2

実は物体の基本的な運動の多くは質点で記述できる．例えば講義で話した空気抵抗のある落下運動やバネの運動はその典型例である．物体の運動をその重心に注目すれば，前問のように位置の時間変化は記述できる．そこから力は計算できるので，ブーメランでも，ティッシュペーパーの落下でも，中村俊輔のフリーキックでも原理的には記述できる．ただし，そのときの力に対して，何かしらの合理的な説明が与えられるかどうかは明らかではない．その力の正体がよく理解できたとき，我々はまた賢くなったと思えるし，その力を他に利用することができるかもしれない．力の正体は力学の範囲を超えることはあるが，物理の問題としてわかっていることもある．例えば，空気抵抗のストークスの理論がその例である．

一方で，決定的にダメなのは物体が変形したり，回転したりする場合である．その解きは力学をさらに，流体力学や剛体力学に進化させる必要がある．

第二回物理学 B レポート問題の解答例

問題 1 「ガリレオ実験」:

1-1

座標は図のようにとることにする．斜面に平行方向に働く力は重力 $Mg \sin \theta$ だけなので，運動方程式は，

$$M\ddot{x} = Mg \sin \theta$$

となる．

1-2

解くべき微分方程式は，

$$\ddot{x} = g \sin \theta$$

である．この方程式は重力が $g' \equiv g \sin \theta$ の落下運動と全く同じである．落下運動の結果を使うことにする．初速 $v(t=0) = 0$ であることに注意すると，

$$v(t) = (g \sin \theta)t$$

であり，位置は $t=0$ の位置を原点とすると，

$$x(t) = \frac{1}{2}(g \sin \theta)t^2$$

である．

1-3

斜面を滑り終えた位置の x 座標は， $\frac{h}{\sin \theta}$ であるので，その時間を t^* とすると，

$$\frac{1}{2}(g \sin \theta)(t^*)^2 = \frac{h}{\sin \theta} \implies t^* = \frac{1}{\sin \theta} \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

となる．

1-4

この時刻 t^* は質量 M に全く依存しない．つまり，落下に必要な時間は M に依らず一定なのである．これがガリレオが発見したことである^f．このことは，運動方程式が M に依存しないで書けることからわかる．結局，ピサの斜塔から垂直落下させなくても，斜面の落下でも同じ結論になるわけである．

1-5

滑り切ったときの速度は，

$$v(t^*) = g \sin \theta \frac{1}{\sin \theta} \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{2gh}$$

^f講義で調べたように，空気抵抗のある落下運動では質量に依存する．

である．この速度は角度 θ には依存しない．つまり，同じ高さ h から落下させた物体は，地面に着地するときには同じ速さになっていることがわかる．落下に要する時間 t^* は角度 θ に依存しているにもかかわらずである．

1-6

力積は，力の時間に関する積分である．斜面を落下する間の力積 I は，

$$I_x = \int_0^{t^*} dt F_x = \int_0^{t^*} dt Mg \sin \theta = Mg \sin \theta t^* = Mg \sin \theta \frac{1}{\sin \theta} \sqrt{\frac{2v}{g}} = M \sqrt{2gh}$$

である．

これもまた斜面の角度 θ には依存しない．前問の結果から，滑り切ったときの物体の運動量は $Mv(t^*) = M\sqrt{2gh}$ であるので，この力積に等しい．初速が 0 であったことに注意すると，このことは，

斜面を落下する間に物体の受ける力積は物体の運動量変化 $(Mv(t^*) - Mv(0))$ に等しい

ことがわかる．このことは角度 θ に依存しなくて，高さ h にだけ依存していることが重要である．この関係は運動方程式を積分することによって示すことができる一般的な法則である^g．

1-7

第一回目のレポートに質点で記述できる例を考えたときに「記述できること」と「力の正体がわかること」は別であることを議論した．ここでは運動が実験的に観測できたときに，そこから力に関して何がわかるか考えてみようというわけである．問題文にあるように，結果は抵抗のない落下ではなくて，何かしらの抵抗力があることと，物体の質量を変えても落下時間が変化しないことがわかった．これらのことから，抵抗力（摩擦力）に関することを考えてみる．この運動を記述する運動方程式の右辺にはこの抵抗力の項が加えられる．しかし，落下時間が質量に依存しないということは方程式が質量に依存しないというわけである．つまり，この抵抗力も重力と同様に質量に比例しているときに，それが実現するわけなので，結果として，抵抗力が質量に比例することがわかる．

実際に，摩擦に関しては幾つかの経験則^hがあって，その一つとして，摩擦力の大き

^gこれは講義で示した．

^h我々の生活しているスケールでの摩擦に関しては，アモン・クーロンの法則と呼ばれる経験則がある．

1. 摩擦力は見かけの接触面積に依存しない
2. 摩擦力は垂直抗力に比例する
3. 動いている物体の摩擦力は止まっているときの摩擦力よりも小さく，また動いている速度には依らない．

これら法則は多くの摩擦現象で成り立っているが，その理由についてはわからないことも多く，この法則が破れている場合もある．摩擦については，工学の応用面では大変重要あり，その起源も含めて現在でも研究されている．

さは垂直抗力に比例する．垂直抗力は $Mg \cos \theta$ であり，まさに質量に比例している．

問題 2 「スカイダイビング問題」:

この問題では，うまく微分方程式の解を接続することが目的である．

2-1

t_0 までは，抵抗無しの落下運動である．飛び出す位置を原点にして，上向きに z 軸の正の方向をとると，時刻 t_0 での位置 $z(t)$ と速度 $v(t)$ はそれぞれ

$$z(t_0) = -\frac{1}{2}gt_0^2 \quad (2)$$

$$v(t_0) = -gt_0 \quad (3)$$

である．

2-2

左辺の力の次元は， $[F] = MLT^{-2}$ である．速度の次元は LT^{-1} であるので，運動方程式の次元を書くと，

$$MLT^{-2} = [\kappa](LT^{-1}) \implies [\kappa] = \frac{MLT^{-2}}{LT^{-1}} = \frac{M}{T}$$

となる．

2-3

講義では代数方程式の方法を使ったので，ここでは変数分離の方法で解いてみることにする．速度に関する運動方程式は，

$$m\dot{v} = -mg - \kappa v \implies \dot{v} = -g - \frac{\kappa}{m}v \implies \frac{\dot{v}}{g + \frac{\kappa}{m}v} = -1$$

である．これは確かに変数分離の形になっている．積分すると，未定定数を C として，

$$\int dv \frac{1}{g + \frac{\kappa}{m}v} = \int dt - 1 \implies \frac{m}{\kappa} \log \left(g + \frac{\kappa}{m}v \right) = -t + C$$

となる． v について解く前に，初期条件から定数 C を決める．その条件式は，

$$\frac{m}{\kappa} \log \left(g + \frac{\kappa}{m}(-gt_0) \right) = -t_0 + C$$

ことから，

$$\begin{aligned} \frac{m}{\kappa} \left[\log \left(g + \frac{\kappa}{m}v \right) - \log \left(g + \frac{\kappa}{m}(-gt_0) \right) \right] &= t_0 - t \\ \frac{g + \frac{\kappa}{m}v}{g - \frac{\kappa}{m}(gt_0)} &= \exp \left(\frac{\kappa}{m}(t_0 - t) \right) \\ v(t) &= \frac{mg}{\kappa} \left[\left(1 - \frac{\kappa t_0}{m} \right) \exp \left(\frac{\kappa}{m}(t_0 - t) \right) - 1 \right] \end{aligned} \quad (4)$$

となる．もう一度積分すると，

$$\begin{aligned} z(t) &= \frac{mg}{\kappa} \left[\frac{-m}{\kappa} \left(1 - \frac{\kappa t_0}{m} \right) \exp \left(\frac{\kappa}{m} (t_0 - t) \right) - t \right] + C' \\ z(t) &= \frac{mg}{\kappa} \left[\left(t_0 - \frac{m}{\kappa} \right) \exp \left(\frac{\kappa}{m} (t_0 - t) \right) - t \right] + C' \end{aligned}$$

初期条件より，

$$-\frac{gt_0^2}{2} = \frac{mg}{\kappa} \left[\left(t_0 - \frac{m}{\kappa} \right) 1 - t_0 \right] + C'$$

となり， C' を代入して，

$$z(t) = \frac{mg}{\kappa} \left[\left(t_0 - \frac{m}{\kappa} \right) \left(\exp \left(\frac{\kappa}{m} (t_0 - t) \right) - 1 \right) + t_0 - t \right] - \frac{gt_0^2}{2}$$

2-4

末端速度 (終端速度) $v(\infty)$ は，速度の表式 (4) で $t \rightarrow \infty$ の極限をとると，

$$v(\infty) = -\frac{mg}{\kappa}$$

が得られる．

2-5

t_0 の時に丁度終端速度に達するのは， $t_0^* = \frac{m}{\kappa}$ である． t_0 のときに終端速度に到達していない場合として， $t_0 = t_0^*/2$ ，終端速度を越えている場合として， $t_0 = 2t_0^*$ のグラフを下に示す．

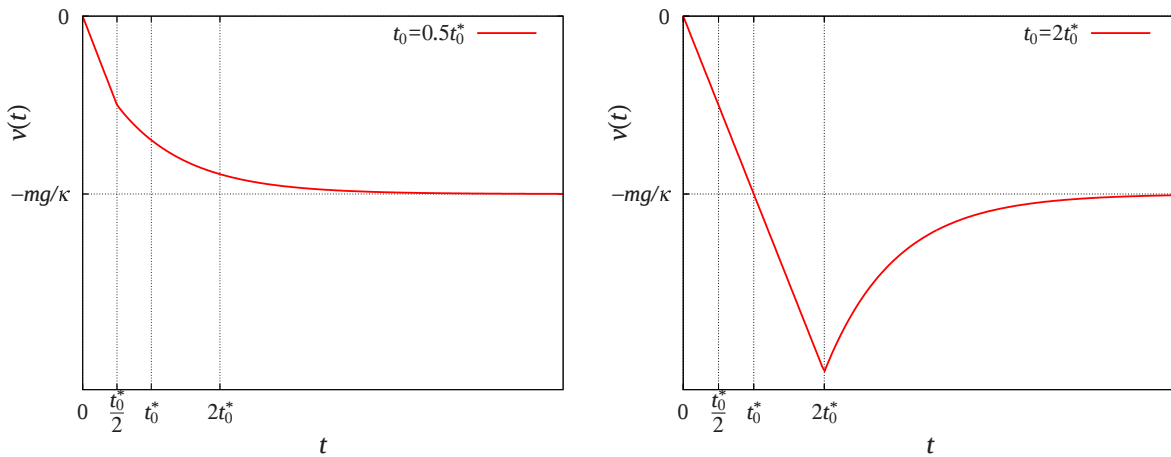


図 1: 速度の時間依存性：(左) $t_0 = 0.5t_0^*$ の場合．(右) $t_0 = 2t_0^*$ の場合．左は根性がなくて，さっさとパラシュートを開いてしまった場合で，右は勇気を持ってしばらく自由落下を堪能した場合に相当する？