第四回物理学 A レポート問題の略解

福島孝治 (東京大学院総合文化)

2011 年 7 月 18 日: ver. 1.0

4-1: この問題では，質点系の角運動量に関する性質を議論している．講義ノートをちゃんとまとめると，解答になるはず.

質量がそれぞれ m_i の質点 $(i = 1, \cdots N)$ に対して，その位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_i$ とし，運動量を $\boldsymbol{p}_i$ とする．このとき，全角運動量 $\boldsymbol{L}$ は,

$$\boldsymbol{L} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i \tag{17}$$

である．この質点系の重心ベクトル $\boldsymbol{R}$ は,

$$\boldsymbol{R} = \frac{\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i}{M}$$

である．ここで, M は質点系の全質量である．それぞれの質点の位置ベクトルを重心からの相対ベクトル $\boldsymbol{r}'_i$ を用いて表すと，$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{R} + \boldsymbol{r}'_i$ となる．運動量ベクトル $\boldsymbol{p}_i$ は, $\boldsymbol{p}_i = m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i = m_i \dot{\boldsymbol{R}} + m_i \dot{\boldsymbol{r}'}_i$ と表される．これらを用いて，全角運動量を表すと,

$$\boldsymbol{L} = \sum_i (\boldsymbol{R} + \boldsymbol{r}'_i) \times m_i \left(\dot{\boldsymbol{R}} + \dot{\boldsymbol{r}'}_i \right) = \sum_i \left(m_i \boldsymbol{R} \times \dot{\boldsymbol{R}} + \boldsymbol{r}'_i \times (m_i \dot{\boldsymbol{r}'_i}) + (m_i \boldsymbol{r}'_i) \times \dot{\boldsymbol{R}} + \boldsymbol{R} \times (m_i \dot{\boldsymbol{r}'_i}) \right)$$

となる．最後の二つの項は重心の定義よりゼロ ($\sum_i m_i \boldsymbol{r}'_i = 0$) になり，重心の角運動量 $\boldsymbol{L}_G = \boldsymbol{R} \times M \dot{\boldsymbol{R}}$ と，重心回りの角運動量 $\boldsymbol{L}' = \sum_i \boldsymbol{r}'_i \times (m_i \dot{\boldsymbol{r}'_i})$ を用いて,

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_G + \boldsymbol{L}'$$

となることがわかる．

全角運動量の運動方程式 (トルクの方程式）は，それぞれの質点に働く外力を $\boldsymbol{F}_i$ として,

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i = \sum_i (\boldsymbol{R} + \boldsymbol{r}'_i) \times \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{R} \times \sum_i \boldsymbol{F}_i + \sum_i \boldsymbol{r}'_i \times \boldsymbol{F}_i$$

となる．右辺の第一項は重心の角運動量の時間変化を表し，それは重心の運動方程式と同じ情報を持つ[7]．一方，第二項は重心回りの角運動量 $\boldsymbol{L}'$ の時間変化を表す．ここで，外力が一様な重力の場合を考えると,

$$\frac{d\boldsymbol{L}'}{dt} = \sum_i \boldsymbol{r}'_i \times (-m_i g \boldsymbol{e}_z) = \left(\sum_i m_i \boldsymbol{r}'_i \right) \times g \boldsymbol{e}_z = 0$$

となるので，$\boldsymbol{L}'$ は保存されることがわかる[8].

[7] 重心の運動方程式から，この方程式を導くことができる (宿題).

[8] この式変形にはやや乱暴な点があることを補足しておく．重心まわりの角運動量 $\boldsymbol{L}'$ の運動方程式は,

$$\frac{d\boldsymbol{L}'}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum_i \boldsymbol{r}'_i \times (m_i \dot{\boldsymbol{r}'_i}) \right) = \sum_i \dot{\boldsymbol{r}}'_i \times (m_i \dot{\boldsymbol{r}'_i}) + \sum_i \dot{\boldsymbol{r}}'_i \times (m_i \ddot{\boldsymbol{r}'_i})$$

4-2: 問題文では半径は a となり，図では直径が a であったので混乱を招いたかもしれないが，本文に合わせることにする．練習問題 page 51 の脚注 (a) にあるように，円柱の中心軸に対する慣性モーメントは，$\frac{Ma^2}{2}$ である．問題は円柱の辺を軸としたときの慣性モーメント I であるが，平行軸の定理により，

$$I = \frac{Ma^2}{2} + Ma^2 = \frac{3Ma^2}{2}$$

となる．

ちなみに，図に従って，直径を a とした場合には，$I' = \frac{3Ma^2}{8}$ となる．

となるが，第一項はもちろんゼロになる．第二項に運動方程式 $m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i = -m_i g\boldsymbol{e}_z$ を代入したいが，代入されるのは相対ベクトルであり，$\ddot{\boldsymbol{r}}'_i = \ddot{\boldsymbol{r}}_i - \ddot{\boldsymbol{R}}$ であることに注意すると，

$$\frac{d\boldsymbol{L}'}{dt} = \sum_i \dot{\boldsymbol{r}}'_i \times \left(m_i\left(\ddot{\boldsymbol{r}}_i - \ddot{\boldsymbol{R}}\right)\right) = \sum_i \dot{\boldsymbol{r}}'_i \times (m_i\ddot{r}_i) - \sum_i (m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i) \times \ddot{\boldsymbol{R}} = \sum_i \dot{\boldsymbol{r}}'_i \times (-m_i g\boldsymbol{e}_z)$$

となって，上の式になります．

$m_i\ddot{\boldsymbol{r}}'_i = \boldsymbol{F}_i$ が成り立つように説明していたけど，変じゃないか？と指摘されました．結果としては同じ式がでてくるのですが，そんな運動方程式が成り立っているわけではないです．重心の運動が必要です．