

B.2-11 [線積分]:

a を正の実数として、曲線 $C: x^2 + y^2 = a^2$ に沿って、ベクトル場

$$\mathbf{A} = (2x - y)\mathbf{e}_x + 2y\mathbf{e}_y$$

の線積分

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x}$$

を求めよ。ここで、 $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ はそれぞれ x, y 方向の単位ベクトルとする。

B.3 微分方程式の問題

B.3-1 [微分方程式]:

次の微分方程式を解け .

$$(1) \quad \frac{d}{dx}y = 1+y^2, \quad (2) \quad \frac{d}{dx}y = \frac{y^2+1}{x^2+1}, \quad (3) \quad \frac{d}{dx}y = \left(\frac{y+1}{x+1}\right)^2$$

B.3-2 [微分方程式 2]:

次の微分方程式を解け .

$$(a) \quad \frac{d}{dx}y = \frac{y-x+2}{y-x+4} \quad (u = y - x \text{ とおくとよい}),$$

$$(b) \quad \frac{d}{dx}y = \frac{y-\sqrt{x^2+y^2}}{x} \quad (u = y/x)$$

B.3-3 [二階の線形微分方程式]:

次の 2 階の微分方程式を解け .

$$(a) \quad y'' + 5y' + 6y = 0$$

$$(b) \quad y'' + 2y' + 3y = 0$$

$$(c) \quad y'' + 6y' + 9y = 0$$

B.3-4 [微分方程式 3]:

初期条件として , $x(t=0) = 2, x'(0) = 7$ を満たす微分方程式の解を求めよ .

$$\frac{d^2}{dt^2}x - 4\frac{d}{dt}x + 7x = 0$$

B.3-5 [人工モデル]:

ある時刻 t における人口を x とすると , 人口の変化率 (dx/dt) を

$$\frac{d}{dt}x = -kx(x - A)$$

とする人口増減モデルを考える . ここで , k, A は時間によらない定数とする .

- (a) この微分方程式を解け .
- (b) 時間の関数として , このモデルの解をプロットしてみよ .
- (c) 定数 k, A が何に相当するか説明せよ .

B.4 偏微分の問題

B.4-1 [偏微分の練習 1]:

三変数関数 $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ に対して , 次の問に答えよ . ただし , $x^2 + y^2 + z^2 \neq 0$ とする .

- (a) $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ を求めよ .
- (b) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$ を示せ .

B.4-2 [偏微分の練習 2]:

次の二変数関数 $f(x, y)$ の偏微分 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ をそれぞれ求めよ .

- (a) $f(x, y) = e^{ax} (\cos by + \sin by)$
- (b) $f(x, y) = x^y$

B.4-3 [偏微分 1]:

$P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ が関数 $f(x, y)$ の全微分であること , つまり , $Pdx + Qdy = df$ なる関数 f が存在することと

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

であることが , 同値であることを示せ .

B.4-4 [偏微分 2]:

$(3x^2 + 2xy - 2y^2)dx + (x^2 - 4xy)dy$ はある関数 $f(x, y)$ での全微分であることを示し , 関数 $f(x, y)$ を求めよ .

B.4-5 [偏微分 3]:

3 つの変数 P, T, V の間に関数関係 $f(P, T, V) = 0$ があるときに , 次の関係式を証明せよ .

- (a) $\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V + \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = 0$
- (b) $\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V = 1$