

C.3-3 [二階の線形微分方程式]:

これらはどれも斉次方程式であり，特性方程式の方法を用いて解くことができる．

(1) 特性方程式： $\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0, \rightarrow (\lambda + 3)(\lambda + 2) = 0, \rightarrow \lambda = -2, -3$ より，どちらも実数解であるときの一般解は，

$$y(x) = C_1 \exp(-2x) + C_2 \exp(-3x) \quad (\text{C.55})$$

(2) 特性方程式： $\lambda^2 + 2\lambda + 3 = 0, \rightarrow \lambda = -1 \pm i\sqrt{2}$ より，このときの一般解は，

$$y(x) = C_1 \exp((-1 + i\sqrt{2})x) + C_2 \exp((-1 - i\sqrt{2})x) = e^{-x} (C_1 e^{+i\sqrt{2}x} + C_2 e^{-i\sqrt{2}x}). \quad (\text{C.56})$$

オイラーの公式⁴⁰を用いると，

$$y(x) = e^{-x} ((C_1 + C_2) \cos(\sqrt{2}x) + i(C_1 - C_2) \sin(\sqrt{2}x))$$

となり，これが実数であるためには $C_1 = C_2^*$ でなくてはならない⁴¹．

(3) 特性方程式は， $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = (\lambda + 3)^2 = 0$ となり，重解を持つ．この時の一般解は⁴²，

$$y(x) = e^{-3x} (C_1 + C_2 x) \quad (\text{C.57})$$

となる．

C.3-4 [微分方程式 3]:

特性方程式は， $\lambda^2 - 4\lambda + 7 = (\lambda - 2)^2 + 3 = 0$ であり，その解は $\lambda = 2 \pm \sqrt{3}i$ である．一般解は，定数を C_1, C_2 として，

$$x(t) = C_1 e^{(2+\sqrt{3}i)t} + C_2 e^{(2-\sqrt{3}i)t}$$

である．初期条件を満たす条件は，

$$\begin{aligned} 2 &= C_1 + C_2 \\ 7 &= C_1(2 + \sqrt{3}i) + C_2(2 - \sqrt{3}i) \end{aligned}$$

³⁹双曲線関数たち

$$\begin{aligned} \cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ \sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ \tanh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{(\cosh x)'}{\cosh x} = \frac{d}{dx} \log(\cosh x) \end{aligned}$$

⁴⁰ $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$ ．ページ 79 を参照．

⁴¹複素共役：実数 x, y に対して，複素数 $z = x + iy$ とすると，その複素共役 z^* は， $z^* = x - iy$ で定義される．

⁴²ページ 58 を参照．

となり，解くと， $C_1 = \frac{1}{2}(2 - \sqrt{3}i)$, $C_2 = \frac{1}{2}(2 + \sqrt{3}i)$ である．これらは複素共役の関係があるので， $x(t)$ は実数になる．実際に代入してみると，

$$x(t) = e^{2t} (2 \cos(\sqrt{3}t) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3}t)) \quad (\text{C.58})$$

となる．

C.3-5 [人工モデル]:

この問題はある種の人口問題のモデルである．最も有名なマルサス (Malthus) の法則⁴³に改良を加えたのが今回のモデルである．この微分方程式は Pearl-Read の Logistic equation と呼ばれている．

(1): さて，まずはこの微分方程式を解くことにする．この方程式は変数分離で簡単に解くことが出来る．

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} \frac{1}{x(A-x)} &= \frac{1}{A} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{A-x} \right) \frac{dx}{dt} = k \\ \log(x) - \log(A-x) &= \log\left(\frac{x}{A-x}\right) = kAt + C \end{aligned}$$

初期条件として， $x(t=0) = x_0$ とすると，

$$x(t) = \frac{Ax_0 e^{kAt}}{A - x_0 + x_0 e^{kAt}} \quad (\text{C.59})$$

となる．

(2): $A, k > 0$ として，具体的に $A = 50, k = 0.025$ として，幾つかの初期条件に対して，グラフを書いてみた．

(3): $A, k > 0$ の場合には，

$$x(t) = \frac{A}{1 + (A/x_0 - 1)e^{-kAt}} \quad (\text{C.60})$$

となり，この解は，長時間極限で A に収束することがわかる．つまり， A は長時間極限への収束値を意味しており， kA は収束値 A に近づく時間スケールを決めている．

$k < 0$ の場合は，初期値 x_0 と A の大小関係で， $A > x_0$ ならば必ず $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ になる「絶滅」が起き， $A < x_0$ では有限の時間 t で x が無限大になる「人口爆発」が起きる．

⁴³ 「ある生物の個体群を考え，その数を x としたときに，単位時間辺りの出生率を n ，死亡率を m としすると，

$$\dot{x} = nx - mx = (n - m)x$$

と表せる．ここで $a = n - m$ をマルサス係数と呼ぶ．」

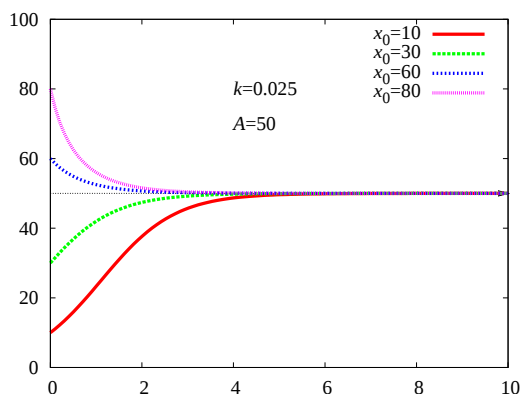


図 10: $A, k > 0$ の場合: 初期の値 x_0 によらず, 長時間極限では A の値に収束している.

C.4 偏微分の問題 (解答編)

C.4-1 [偏微分の練習 1]:

やってみる.

- (a) この問題は, 万有引力やクーロン力の $1/r$ 型のポテンシャルから力を出す計算である.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} = -\frac{1}{2} 2x \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{-x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

y, z についても同様である.

- (b) そのポテンシャルがラプラス方程式を満たすことを示す問題である.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{-1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{3}{2} 2x \frac{-x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} = \frac{-1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{3x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} &= \frac{-3}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{3x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \\ &\quad + \frac{3y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} + \frac{3z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

C.4-2 [偏微分の練習 2]:

$$(a) \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = ae^{ax} (\cos by + \sin by), \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = be^{ax} (\cos by - \sin by).$$

$$(b) \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = yx^{y-1}, \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = x^y \log(x).$$

C.4-3 [偏微分 1]:

全微分であることの必要十分条件を示してみる.