

- (c) 前問と同様に考え， $n - 1$ 回目の最大振れ角 $\phi^{(n-1)}$ との関係から再帰的に求めると，

$$\cos \phi^{(n)} = e^2 \cos \phi^{(n-1)} = e^{2n} \cos \phi = \exp((2 \log e)n) \cos \phi$$

となる．振れ角は徐々に小さくなることが分かる．

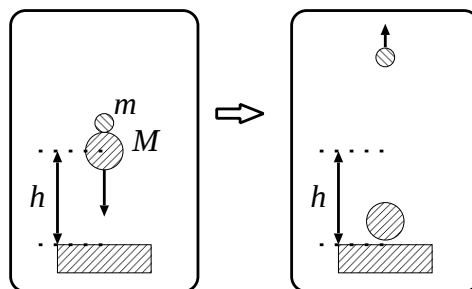
- (d) この振れ角を観測し，衝突回数 n の関数としてグラフに書いたときに， n の指数関数的に現象する振れ角の時定数からはねかえり係数が求まる．

5-4 [5 個球振り子再び]:

振り子の球のはねかえり係数が 1 でないとすると，相対運動のエネルギーは徐々に減っていく．重心の運動エネルギーは保存されるので，十分時間が経つと全ての球が重心運動になり，共通の運動になる．

5-5 [すつとびボール]:

2 つの質量 ($M \gg m$) の異なるボールを右図のように縦に並べて落下させると，地面に落下後，上側の軽いボールは思ったよりもかなり高く跳ね上がる．この原理を力学の知識で考えてみるのがこの問題の趣旨である．じっくり考えて，他人を納得させる説明をする訓練だと思ってもいいかもしれない²⁶．また，跳ね上がった高さを予想してみることにする．



案 1：エネルギー保存則説

ボールは簡単のために質点で近似するとする．最初に 2 つのボールを高さ h まで持ち上げたとなると，このときの力学的エネルギーは， $(M + m)gh$ である．最終状態として，軽いボールだけが跳ね上がりある高さ H に達すると，エネルギーは mgH であるから，エネルギー保存より， H は

$$(M + m)gh = mgH \implies H = \left(1 + \frac{M}{m}\right)h$$

となり， h よりも高く跳ね上がったことになる．これは重いボールのエネルギーを軽い方へすべて移行していることになる．果して，そんなことができるだろうか？地面に着地前後では，位置エネルギーを全て運動エネルギーに変換している．そこでは，着地前は $v_M = \sqrt{2gh}$, $v_m = \sqrt{2gh}$ であり，着地後は $v'_M = 0$, $v'_m = \sqrt{2g(1 + M/m)h}$ となっている．これはどのような衝突が起こって実現するだろうか．エネルギーが保存するので，床とボール，ボール間の衝突は完全弾性衝突だろう．そうする

²⁶ 論破する訓練といえばディベートがあるが，それはどうみても理系には馴染まないと思う．相手を論破するのではなく，納得させられるくらいの説得力をもって物事が理解できるかどうか重要である．友人同士での議論でも，時に立ち止まって，真実に近付いているかどうかを確認されたい．

と、まず床と重いボールが衝突して、ボールが同じ速さで跳ね返る．そして、ボール間の衝突が起こる．そのときに、運動量の変換は、

$$Mv_M - mv_m = (M - m)\sqrt{2gh} \neq m\sqrt{2gh(1 + M/m)}$$

となり、これは運動量が保存していない．運動量の保存則はかなり一般的に成り立つので、これが破れるのは問題である．逆に重いボールには運動エネルギーを与えず、運動量保存則から v'_m を決めることもできる．今度はエネルギー保存則が破れてしまう．それもまずい．

案 2：段階衝突説

そこで、先のような過程で、運動量保存則と跳ね返り係数²⁷による衝突を考えて、跳ね上がる速度を求めてみる．

まず、重いボールが床と衝突する．その時の跳ね返り係数を e 、衝突後の速度を V_M とすると、 $V_M = -e\sqrt{2gh}$ である．その後、落ちて来た軽いボールと衝突すると考える．ボール間の跳ね返り係数を e' 、鉛直上向きを正として、

$$\begin{aligned} \text{運動量保存} &: MV_M - mv_m = MV'_M + mv'_m \\ \text{跳ね返りの式} &: V_M + v_m = -\frac{1}{e'}(V'_M - v'_m) \end{aligned} \tag{5.41}$$

となる．これを解くと、

$$\begin{aligned} v'_m &= \frac{1}{M+m} ((1+e')MV_M + (e'M - m)v_m) \\ &= \frac{1}{M+m} \left((1+e')eM\sqrt{2gh} + (e'M - m)\sqrt{2gh} \right) \\ &= \frac{\sqrt{2gh}}{M+m} ((1+e')eM + (e'M - m)) \end{aligned}$$

となり、跳ね上がる高さ

$$H = v'^2_m / 2g = h \frac{((1+e')eM + (e'M - m))^2}{(M+m)^2} = h \frac{((1+e')e + (e' - m/M))^2}{(1 + m/M)^2}$$

簡単な極限として、 $m/M = 0$ 、跳ね返り係数を $e = e' = 1$ とすると、 $H = 9h$ となり、かなり(猛烈に)飛び上がっている²⁸．実際には、 $e = 0.4$ 、 $e' = 0.6$ 程度²⁹とすれば、 $H/h = (1 + 0.6 + 0.24)^2 \sim 3.4$ となる．よい程度だろうか．

²⁷ 高校の物理で扱うけど、大学の力学で歯切れが悪くなることの一つとして、摩擦力がある．保存力でない例としては必ず出て来るが、摩擦力の起源についての言及はほとんどない．あまりよく理解されていないということがその理由だと思う．もう一つ、あまり触れられないのが、この跳ね返り係数である．跳ね返り係数もその起源は難しい．高校物理では跳ね返り係数は 1 以下であると暗に思われて来た．エネルギー保存則から必然的であり、1 を越えると第一種永久機関ができてしまう．しかし、内部自由度を考えることで、跳ね返り係数は 1 を越えることは最近、日本の研究者によって明かにされた．

²⁸ 案 1 では H は無限大になってしまう．極端な状況にもっていくことは物理ではよくやることであり、そこで何が起きるかを考えることは大事である．

²⁹ これらは個々に実験すれば求めることができる．

また、「高くすつとぶ」ための条件を考えてみる．このとき「すつとぶ」とは，落ちてきたときよりも大きな速度を持つことと言い換えてもいいだろう．その条件は， $|V_M| < v'_m$ である．この不等式を計算すると，

$$e' > \frac{m}{M}$$

となる．同じ質量の2つのボールでは跳ね上がらないことになる．確かにテニスボール2つで実験してみても跳ね上がることはない．

上の式は跳ね上がり高さについての予想が正しいかどうかは，その帰結を実験的に検証したり，予想の際の仮定や仮説の妥当性を検討する必要がある．まずは高さの実測値と予想の検討，それから，跳ね返り係数を別に測定して，検証されるべきであろう．

それから，床との衝突とボール間の衝突が順番で起きることを仮定しているが，これが本質的かどうかはよく分らない．同時に衝突しているときに何が起きているかが不明で，はねかえり係数で運動が表せるかどうか非常に難しい．ただし，実験的に衝突を順番に起こすことは出来る．初期状態のボールをわざと離しておくことで実現可能で，このときには特に変わったことが起きずにちゃんとすつとぶことが確認できる．

6 慣性座標系ほか(解答編)

6-1 [慣性力]:

電車に乗っているときの，走り出し、止まるときなど，速度の変化するときや，カーブなどの運動の方向が変わるときがそれにあたる．一般に，速度変化している系にあるときには，慣性力を感じる．メリーゴーランドに乗ったときやエレベータにのったときも同様である．

6-2 [慣性力の大きさ]:

地球の角速度は，

$$\omega = \frac{2\pi}{24 \text{ 時間}} = \frac{2\pi}{86400 \text{ sec}} = 7.27 \times 10^{-5} \text{ rad/sec.}$$

である．

(a) コリオリ力が重力の1%の大きさになるために必要な速度の条件を考えると，

$$|2m\omega v| \sim mg \times 0.01 \implies v \simeq \frac{0.01g}{2\omega} \simeq 670 \text{ m/sec}$$

これは音速を軽く越えないと重力の1%にはならない．