第一回物理学レポート問題の解答例

福島孝治 (東京大学院総合文化)

2011 年 6 月 6 日: ver. 1.0

問題 1 「ベクトル演算 1」の趣旨: ベクトル積についてなれるために一度は手を動かして見る．それから，1-2 ではベクトル積の幾何学的な意味を考えることで，イメージを深める．

解答例：1ー1 解答は成分を書き下してみると，簡単に示すことができる．一般的な注意だが，ベクトルは $\boldsymbol{A}$ のように太字か，あるいは，$\vec{A}$ のように矢印をつけて書くことにする．そうすることで変数がベクトルかただのスカラーかの違いがよくわかる．たまに**ベクトル**=スカラーという間違った式変形を見かけるが，このような表記に従えばそのミスは避けられる．

ベクトルの成分を$\boldsymbol{A}= (A_x, A_y, A_z)$ のように書くことにする．左辺は，

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C} &= (B_yC_z - B_zC_y, B_zC_x - B_xC_z, B_xC_y - B_yC_x) \\
\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) &= \begin{pmatrix} A_y(B_xC_y - B_yC_x) - (B_zC_x - B_xC_z)A_z \\ A_z(B_yC_z - B_zC_y) - (B_xC_y - B_yC_x)A_x \\ A_x(B_zC_x - B_xC_z) - (B_yC_z - B_zC_y)A_z \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3}
$$

一方右辺の成分を書き下すと，

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\,\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C} &= (A_xC_x + A_yC_y + A_zC_z)\begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} \\
&- (A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z)\begin{pmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (A_yC_y + A_zC_z)B_x - (A_yB_y + A_zB_z)C_x \\ (A_xC_x + A_zC_z)B_y - (A_xB_x + A_zB_z)C_y \\ (A_xC_x + A_yC_y)B_z - (A_xB_x + A_yB_y)C_z \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4}
$$

この式 (3) と (4) の右辺は等しいから，与式は示された．

この問題は, 成分を書くのが面倒くさく，もっと簡単にできないかと考えたくなる．その例を簡単に紹介する．まず，ベクトル積の幾何学的な意味を考える．$\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C} = \boldsymbol{D}$ と置くと，ベクトル$\boldsymbol{D}$は$\boldsymbol{B}$と$\boldsymbol{C}$に垂直な方向を向いている．求めたいベクトル $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{D}$ はベクトル$\boldsymbol{D}$と垂直なので，結果として$\boldsymbol{B}$と$\boldsymbol{C}$の 2 つのベクトルで張られる面に平行であることがわかる．つまり，2 つの定数 j,k を用いて，

$$
\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = j\boldsymbol{B} + k\boldsymbol{C}
$$

と表される．また，$\boldsymbol{E}$は$\boldsymbol{A}$と垂直 ($\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{E} = 0$) であることから，両辺に $\boldsymbol{A}$ との内積をとり，

$$
j\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} + k\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C} = 0
$$

となる．別の定数 l を用いて，

$$j = l\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}, \quad k = -l\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$$

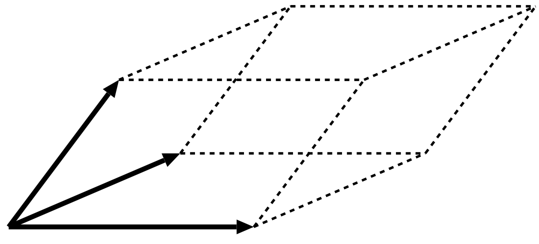
であることがわかり，まとめると，

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = l(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B} - l(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$$

となる．この式は$\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{C}$に対して線形である．つまり，例えばそれぞれのベクトルを2倍しても成り立つ式である．そこで，何かしら特別なベクトルについて，成り立つように定数 l を決めて良い．$\boldsymbol{A} = (1,0,0)$, $\boldsymbol{B} = (0,1,0)$, $\boldsymbol{C} = (1,0,0)$ とすると，$l = 1$ がわかり，与式が成り立つことが示された.

解答例：1－2

ここでは実際に A，B，C の図形をちゃんと書いてみる必要がある．この他にも座標系は右手系を使っている[2]．右図のように 3 つのベクトルをとったとする.



まず，ベクトル $\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}$ を$\boldsymbol{D}$とおくと，ベクトル$\boldsymbol{D}$の方向は$\boldsymbol{B}$と$\boldsymbol{C}$に垂直で，大きさはその 2 つのベクトルで書かれる平行四辺形の面積である．この$\boldsymbol{D}$ と$\boldsymbol{A}$との内積は，2 つのベクトルのなす角を θ として，$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{D} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{D}|\cos\theta$ と書ける．$\boldsymbol{A}\cos\theta$ は$\boldsymbol{D}$への射影であるから，平行四辺形に対する高さである．結局，$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{D}$ は平行四面体の体積であることがわかる.

問題 2「ベクトルの微分」問題の趣旨：もうひとつベクトルの演算として，微分を考えてみた.

解答例 2-1: 問題 1 と同様に考えると，成分をいれて示せばいいわけでが，その前に少し微分の演算の性質を考えてみる．いま，実数変数 t の二つのベクトル $\boldsymbol{A}(t)$ と $\boldsymbol{B}(t)$ があり，その成分をそれぞれ，$\boldsymbol{A}(t) = (A_x, A_y, A_z)$, $\boldsymbol{B}(t) = (B_x, B_y, B_z)$ とする．その内積 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ の微分を考える．書き下し見ると，

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{A}(t)\cdot\boldsymbol{B}(t)\right) &= \frac{d}{dt}\left(A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z\right) = \dot{A}_xB_x + A_x\dot{B}_x + \dot{A}_yB_y + A_y\dot{B}_y + \dot{A}_zB_z + A_z\dot{B}_z \\ &= \left(\dot{\boldsymbol{A}}\cdot\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\cdot\dot{\boldsymbol{B}}\right)\end{aligned}$$

となり，通常の積の微分ルールが成り立っていることがわかる[3].

---

[2]直交座標を定義するときに，x 軸，y 軸を定義した後の z 軸の方向には向きの任意性がある．右手系では，x, y 軸をそれぞれ右手の親指，人差指としたときに，中指の方向に z 軸をとるように座標系を設定する.

[3]もとの微分の定義に戻っても，同様に示すことが出来る.

問題の趣旨：最近の高校の教科書を見ると，実際に実験する課題がかなり採り入れられているので，このあたりは慣れているのかも知れないが，運動方程式を解くことの意味を考える機会になればいいと考えての出題である．

レベル 1：まずは力の釣り合いから出す．

1. 等加速度運動する電車の中では慣性力と重力がつり合っているときに傾いている角度から求める．
2. ひもを付けたおもりを一定の角速度で回転させ，その時の遠心力とのつり合いから求める．
3. 重力とバネの釣合からバネ定数を求める．

他には運動方程式の解と運動の観測から決める方法があった．

1. 重力中の落下問題: $h = \frac{1}{2}gt^2$
2. 振り子の周期： $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$
3. バネ振動の周期：$T = 2\pi\sqrt{\frac{k}{m}}$

レベル 2：観測を気にする．

- 誤差：統計誤差と系統誤差の違い
- 空気抵抗，その他の摩擦
- 微小振動近似
- 観測時間の精度

  例えば，十分長い時間の観測によって，精度をあげようとする試みがたくさんあった．振り子の問題ならば，１周期分ではなくて，もっと長く観測して平均を求める．また重力落下では斜面を落とすことで，実効的な重力を弱くし，落下の時間を長くするようにしている．こうすることで，観測時間の精度はあがるかも知れない．これは上の言葉でいえば，観測によるふらつき具合を減少させるので，統計誤差を改善していることになる．しかし，その代償として，振り子では空気抵抗の効果がどんどんでてくるだろうし，斜面の問題では斜面との摩擦．あるいは，球の場合，転がることでエネルギーを損失する．これらは，系統的に真値からのずれを産み出すので，系統誤差と呼ばれるものである．統計誤差を小さくすると，今度は系統誤差が見えだしてくる例である．キレイな実験データが出たからといって，真の値に近付いているとは限らないのである．

  学生実験ではもっと高度な測定を行い，精度ついても深く考察することになる．

第二回物理学 A レポート問題の解答例とコメント

福島孝治 (東京大学院総合文化)

2011 年 6 月 6 日: ver. 1.0

問題の趣旨：一回の微分方程式を解いて，初期条件の接続を正しく行う練習問題である．

ここでは空気抵抗の詳細は限定していないので，自分で適当に仮定することになる．運動方程式は，速度に比例した抵抗を仮定して，

$$m\ddot{z} = -mg - \kappa(t)\dot{z} \quad \text{with } \kappa(t) = \begin{cases} 0 & \text{for} \quad t < t^* \\ \kappa & \text{for} \quad t > t^* \end{cases}$$

となる．但し，κ は空気抵抗の抵抗係数を表し，$t > t^*$ ではパラシュートを開くこととする．運動方程式は速度 v に対する一階微分方程式に

$$\dot{v} = -g - \frac{\kappa}{m}v$$

これは変数分離で解くことが出来る．その解は，積分定数 C を用いて，

$$v = \frac{m}{\kappa}\left(Ce^{-\frac{\kappa}{m}t} - g\right)$$

と表せる．時間の進行とともに順番に定数を決めて行く．

1. $t < t^*$ のとき，$t = 0$ で初速度 0 だから，$C = g$ なので，

   $$v = \frac{mg}{\kappa_1}\left(e^{-\frac{\kappa_1}{m}t} - 1\right)$$

   となる．この時間領域では，$\kappa = 0$ とするので，その極限を正しくとると，

   $$v(t) = -gt$$

   と，自由落下の式になる．

2. $t = t^*$ での条件は，$v(t^*) = -gt^*$ となるので，これを初期条件として，改めて定数 C を決めればよい．

   $$-gt^* = \frac{m}{\kappa}\left(Ce^{-\frac{\kappa}{m}t^*} - g\right)$$

   これを C について，解くと，

   $$C = e^{\kappa/mt^*}g\left(1 - \frac{\kappa t^*}{m}\right)$$

   となる．

3. これらをまとめると，

$$v(t) = \begin{cases} -gt & \text{for} \quad t < t^* \\ \frac{mg}{\kappa}\left((1 - \frac{\kappa t^*}{m})e^{-\frac{\kappa}{m}(t-t^*)} - 1\right) & \end{cases}$$

となる．典型的な場合を図 (図 1) を示しておく．

この運動は，最終的には κ できまる終端速度 $-\frac{mg}{\kappa}$ に収束するが，t^* での速度とその終端速度との大小関係から，単調か速度を減少させるかが変わって来る．単調である条件は，$v(t^*) > -\frac{mg}{\kappa}$ で決まる．

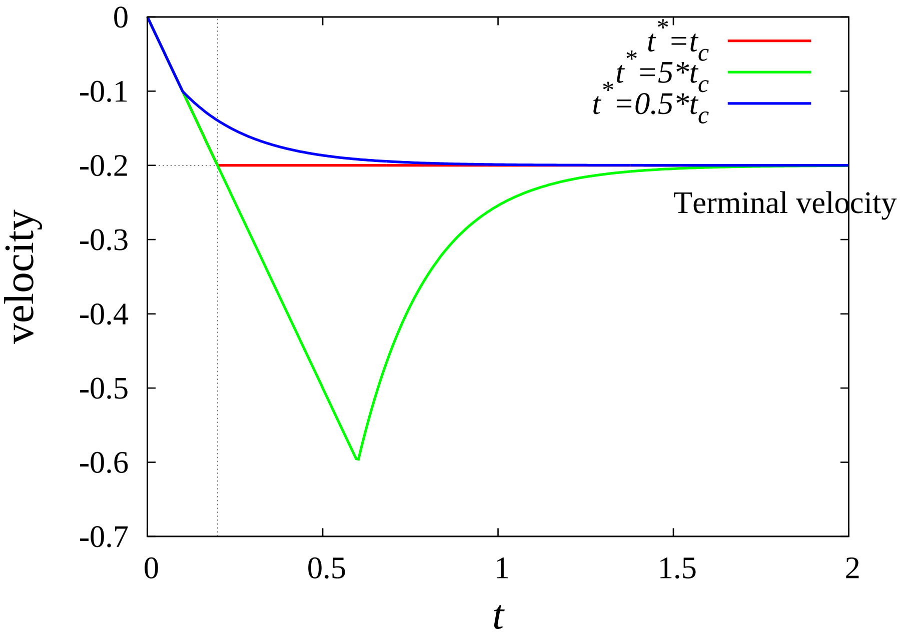


図 1: 速度の時間依存性．ここでは，$m = 1.0, g = 1.0$ として，$\kappa = 5$ とおいた．$t = t^*$ で $v(t)$ が κ の終端速度になっている時間の条件を t_c とする．グラフには，3 つのプロット ($t^* = t_c, t^* = 0.5t_c, t^* = 3t_c$) を描いた．

問題の趣旨：2-1. バネの釣り合いの位置を原点として，鉛直上向きに z 軸をとることとする．重力加速度は g として，運動方程式は，それぞれ，

$$M\ddot{z} = -Mg - N - kz$$

$$m\ddot{z} = -mg + N$$

となる．ここで，N はボールと板の間に働く垂直抗力である．この方程式から，N を消去すると，$(M + m)\ddot{z} = -(M + m)g - kz$ となり，解くべき微分方程式は，

$$\ddot{z} + \frac{k}{M + m}z = -g$$

となり，質量 $(M+m)$ のバネ振り子の運動方程式と同じである．この方程式の一般解は，二つの積分定数を A, ψ として，

$$z(t) = -\frac{M+m}{k}g + A\cos(\omega t + \psi)$$

である．ここで，振動数を $\omega = \sqrt{\frac{k}{M+m}}$ とおいた．ボールと板がくっついて運動するときは，力の釣り合いの位置 $z^* = -\frac{M+m}{k}g$ のまわりの振動数 ω の単振動となる．

2-2. はねあがあるときの振幅 A に対する条件は，垂直抗力 N がゼロになる条件から求められる．

$$N = m\ddot{z} + mg = m\left(-A\omega^2\cos(\omega t + \psi) + g\right) \leq 0$$

から，A を正の定数とすると，N の最小値は $\cos(\omega t + \psi) = 1$ になるとき、つまり，もっとも最高位置に達したときで，

$$-A\omega^2 + g \leq 0$$

となる．力の釣り合いの位置よりも大きな振幅が必要となる．

2-3. A を与えられた定数として，ボールの質量に対する条件に書き直すと，

$$A \geq g/\omega^2 = \frac{M+m}{k}g, \quad m \leq \frac{Ak}{g} - M$$

となり，軽い方がはねあがりやすい．

第三回物理学レポート問題

福島孝治 (東京大学大学院総合文化研究科)

ver. 1.0: 2011.06.10

問題 1: 力とポテンシャル　ポテンシャル

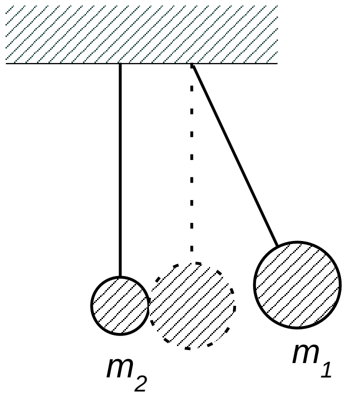
$$U(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2}$$

の中で x 軸上を運動する質量 m の質点の運動を考える．ただし，$x > 0$ とする．

1. 力を求めよ．
2. 力が 0 になる位置はどこか求めよ．
3. このポテンシャルのもとでの運動を説明せよ．

問題 2 カチカチボール

ニ球衝突問題を考える．ただし，$m_1 = 2m_2$ のとき何が起きるかを考えよ．例えば，m_1 を高さ h から静かに話したとせよ．



問題 3 「講義について」: 何かあれば...

締め切りは 6 月 24 日 (金) とする．