

第三回物理学レポート問題の解答例とコメント

福島孝治 (東京大学院総合文化)

2012 年 7 月 6 日: ver. 1.0

問題 1: 力とポテンシャル 1 :

この問題は力とポテンシャルの関係を確認する問題である .

1-1: 力がポテンシャルで与えられているときに , うずなしの条件を満たしていることを確認する . $\nabla \times \mathbf{F}$ の x 成分を明示的に書くと ,

$$(\nabla \times \mathbf{F})_x = \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial U}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial U}{\partial y} \right) = 0$$

となることがわかる . 同様に , y 成分と z 成分についても 0 となることが示される .

一方 , 逆向きに , うずなしの条件 ($\nabla \times \mathbf{F} = 0$) が満たされるときに , あるポテンシャル関数 U が存在して , ベクトル場 $\mathbf{F}$ が $\mathbf{F} = -\nabla U$ と表されることは少々手数が必要である . まず , $\mathbf{F}$ がポテンシャル関数を用いて表されることと , 任意の閉曲線に沿った線積分が常にゼロになること ($\oint_{\text{閉曲線}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = 0$) が同じであることが簡単な議論からわかる . さらに , ストークスの定理から

$$\oint_{\text{閉曲線}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\text{閉局面}} dS \nabla \times \mathbf{F}$$

であることが証明できる . これらから逆方向が示される . 講義ではこのアウトラインは説明したが , ストークスの定理の証明は割愛した (練習問題を参照) .

1-2: ここではある力が与えられたときに , 保存力かどうかを判断し , 保存力であればポテンシャルを求める問題である . まず , ∇ とのベクトル積を計算すると , それぞれ ,

$$(\nabla \times \mathbf{F})_x = \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} = 0$$

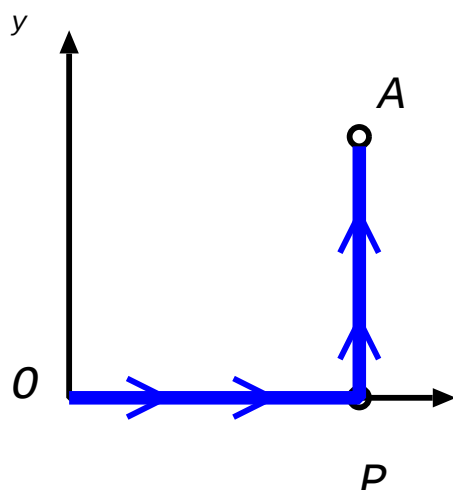
$$(\nabla \times \mathbf{F})_y = \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} = 0$$

$$(\nabla \times \mathbf{F})_z = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = 2y - 2y = 0$$

となり , $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ であることが示され , この力は保存力であることがわかる . 次に , ポテンシャルを求めるが , 基準点を原点 $O(0, 0, 0)$ として , ある位置 $A(x, y, z)$ でのポテンシャルは ,

$$U(x, y, z) - U(0, 0, 0) = - \int_{O \rightarrow A} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$$

と定義される . このとき , $O \rightarrow A$ は原点から位置 A を結ぶ経路を表す . この経路を定義しないとこの積分は定義されない . 一方で , 保存力の性質から積分は経路に依存しないので , 何かしら計算に都合のよい経路を自分で選べばよい . 簡単のために , xy 平面で議論を進めることにする .



例として、次のような経路を選ぶとする。つまり、原点から x 軸上を $P(x, 0, 0)$ まで進み、その後 y 軸に平行に A まで移動する経路である。このとき、 $O \rightarrow P$ では、 $d\mathbf{x} = (dx, 0, 0)$ であり、 $\mathbf{F} = (2x, 0, 0)$ である。また、 $P \rightarrow A$ では、 $d\mathbf{x} = (0, dy, 0)$ 、 $\mathbf{F} = (2x + y^2, 2xy + 3y^2, 0)$ であるので、これらを用いて、線積分を求めると、

$$U(x, y, z) - U(0, 0, 0) = - \int_{O \rightarrow P} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} - \int_{P \rightarrow A} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$$

$$\begin{aligned} U(x, y, z) - U(0, 0, 0) &= - \int_{O \rightarrow P} (2x, 0, 0) \cdot (dx, 0, 0) - \int_{P \rightarrow A} (2x + y^2, 2xy + 3y^2, 0) \cdot (0, dy, 0) \\ &= - \int_0^x 2x dx - \int_0^y (2xy + 3y^2) dy = -(x^2 + xy^2 + y^3) \end{aligned} \quad (5)$$

と求まる。もちろん、他の経路でも同じ結果が導かれる。例えば、 t を媒介変数として、斜めに横切ってもよい。このときは、経路 $\mathbf{X}(t)$ は、 $0 \leq t \leq 1$ として、 $\mathbf{X}(t) = (xt, yt, zt)$ と表される。途中まで計算を示すと、

$$\begin{aligned} U(x, y, z) - U(0, 0, 0) &= - \int \mathbf{F}(\mathbf{X}) \cdot d\mathbf{X} = - \int \mathbf{F}(\mathbf{X}) \cdot \frac{d\mathbf{X}}{dt} dt \\ &= - \int_0^1 (2X + Y^2, 2XY + 3Y^2, 0) \cdot (x, y, z) dt \end{aligned}$$

この続きを計算しても同じ結果が導かれる。

問題 2: 力とポテンシャル 2 :

ある与えられたポテンシャルの元での運動をイメージすることがこの問題のテーマである。簡単のために $x > 0$ に運動領域が限定された一次元空間内での運動を考える。もちろん、微分方程式を解けばよいのであるが、今回はそこまでは問わないことにする。

2-1 まず、ポテンシャル中の係数の次元を求めておく。ポテンシャルはエネルギーの次元をもつので、 $[U] = ML^2T^{-2}$ である。ここから、 $[U] = [a]L^{-1} = [b]L^{-2}$ であるので、それぞれ、 $[a] = ML^3T^{-2}$ 、 $[b] = ML^4T^{-2}$ となる。

2-2: 定義に従って、力 $F_x(x)$ を求めると、

$$F_x(x) = -\frac{\partial}{\partial x} U(x) = \frac{a}{x^2} - \frac{b}{x^3}$$

となる。これはケプラー問題の r 成分の運動方程式に出てくる力と同じ形である。

2-3: 釣り合いの位置は、 $F_x(x) = 0$ となるところなので、方程式を解くと、 $x = b/a$ となる。その他には不安定な釣り合い点としては、 $x = 0$ と ∞ がある。

2-4: 無限遠方でのポテンシャルが0であるので、 $U(x) > 0$ の位置に速度0でくと無限遠方までいくことができる。この条件は、 $U(x) = -\frac{a}{x} + \frac{b}{2x^2} > 0$ より、

$$0 < x \leq \frac{b}{2a}$$

となる。

2-5: このポテンシャル中での振動運動を予想するのだが、まず、ポテンシャルの形状は、右図のようになる。微係数を調べると、前問の釣り合いの位置 (b/a) が唯一の極小点であることがわかる。その近傍での関数形は、二次近似の範囲で、

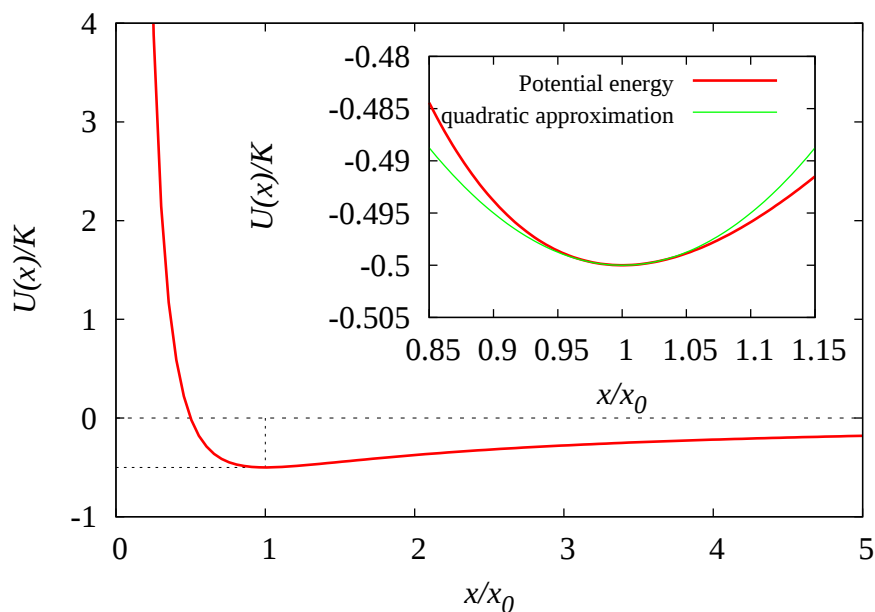
$$U(x) \simeq -\frac{1}{2} \frac{a^3}{b^2} + \frac{1}{2} \frac{a^4}{b^3} \left(x - \frac{b}{a}\right)^2$$

となるので、バネ定数 k が a^4/b^3 のポテンシャルと等価である。 $x \sim \frac{b}{a}$ 付近の位置に静止させると、その質点はばね振動のように位置は振動する。

そのときの振動周期 T は、

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{mb^3}{a^4}}$$

となる。また、ポテンシャル $U(x)$ が負の領域、つまり $x \geq b/2a$ で静かに離すと、広義の意味での振動運動になる。もちろん、 $x > b/2a$ であっても、初期条件として、力学的エネルギーが正の領域になるほどに運動エネルギーを与えると、ポテンシャルにはじきとばされて、無限の彼方に行くことになる。



問題のポテンシャルのグラフ。挿入図は、ポテンシャル極小付近の拡大図。 $K = a^3/b^2, x_0 = b/a$ である。

第四回物理学レポート問題

福島孝治 (東京大学大学院総合文化研究科)

ver. 1.0: 2012.7.6

問題 1: 重心の角運動量 質量が $m_1, m_2, \dots, m_N$ の N 個の質点の運動を考える．それぞれの質点には外力 F_i が働いてるとする．

1. この質点系の全角運動量 L は，重心の角運動量 L_G と重心まわりの角運動量 L' に分離できることを示せ．
2. また，外力が一様な重力 $F_i = m_i g e_z$ のみのとき， L' は保存することを示せ．
3. 夏の夜空を彩る花火を力学的に考える．地上より打ち上げられた花火は，打ち上げ後しばらくして爆発して複数の星に分解される．これを N 個の質点とし，爆発過程は全て内力により起こったと考える．この質点系の重心運動を説明せよ．
4. 空気抵抗を考えないとすると，鉛直方向に働く重力以外の外力は働かない．このとき、鉛直方向以外の全運動量は保存される．この結果，花火を真上から見ると回転対称に見えることが期待される．ところが，最近，ハート型など回転対称でない花火を見かける．この現象はどのように説明されるか？
5. 空気抵抗を考えないとすると，前問より，重心運動まわりの角運動量は保存される．この結果として花火はどのように見えるかを説明せよ．

問題 2 「講義について」： 何かあれば ...

締め切りは 8 月 3 日とする．提出先は，16-221A の部屋の前の封筒．