

第一回物理学レポート問題の解答例

福島孝治 (東京大学院総合文化)

2012 年 5 月 18 日: ver. 1.0

問題 1 「微分方程式」: 線形微分方程式の解法を説明したので、練習してみることにする。解くべき微分方程式は、

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

であるが、 $x(t) = e^{\lambda t}$ において特性方程式を導くと²,

$$\lambda^2 + \frac{k}{m} = 0$$

となる。 k/m は正の実数であることから、この方程式の解は純虚数であり、 $\omega = \sqrt{k/m}$ として、 $\lambda = \pm i\omega$ となる。一般解は、未定定数 C_1, C_2 を用いて、

$$x(t) = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}$$

となる。初期条件 $x(0) = 0$ より、 $C_1 + C_2 = 0$ となる。もう一つの条件から定数を決めるために速度を求めると、

$$v(t) = \dot{x}(t) = i\omega C_1 e^{i\omega t} - i\omega C_2 e^{-i\omega t}$$

であり、 $v(0) = v_0 = i\omega C_1 - i\omega C_2$ より、 $C_1 = \frac{v_0}{2i\omega}$ より、

$$x(t) = \frac{v_0}{2i\omega} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})$$

となる。オイラーの公式 $e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$ を用いると、

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t)$$

となる。見たことのある振動の式が出てきた。

この微分方程式は、 $\ddot{x}$ が x に比例しているので、二回微分して元に戻る関数が解の候補となる。例えば、 $\sin \omega t$ や $\cos \omega t$ である。この二つの重ね合わせを一般解としてもこの場合は正しい答えになる。

問題 2 「ベクトル演算」: ベクトル積についてなれるために一度は手を動かしてみる。それから、2-2 ではベクトル積の幾何学的な意味を考えることで、イメージを深める。

2.1 解答は成分を書き下してみると、簡単に示すことができる³。

²微分方程式の右辺がゼロのときには特解を求めなくても線形解だけでよいことを講義での十分に説明していなかった...

³一般的な注意だが、ベクトルは $\mathbf{A}$ のように太字か、あるいは、 $\vec{A}$ のように矢印をつけて書くことにする。そうすることで変数がベクトルかただのスカラーかの違いがよくわかる。たまに**ベクトル**=スカラーという間違った式変形を見かけるが、このような表記に従えばそのミスは避けられる。

ベクトルの成分を $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$ のように書くことにする．左辺は，

$$\begin{aligned}\mathbf{B} \times \mathbf{C} &= (B_y C_z - B_z C_y, B_z C_x - B_x C_z, B_x C_y - B_y C_x) \\ \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) &= \begin{pmatrix} A_y(B_z C_x - B_x C_z) - (B_z C_x - B_x C_z)A_z \\ A_z(B_y C_z - B_z C_y) - (B_x C_y - B_y C_x)A_x \\ A_x(B_z C_x - B_x C_z) - (B_y C_z - B_z C_y)A_z \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (3)$$

一方，右辺の成分を書き下すと，

$$\begin{aligned}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} &= (A_x C_x + A_y C_y + A_z C_z) \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} \\ &\quad - (A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z) \begin{pmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (A_y C_y + A_z C_z)B_x - (A_y B_y + A_z B_z)C_x \\ (A_x C_x + A_z C_z)B_y - (A_x B_x + A_z B_z)C_y \\ (A_x C_x + A_y C_y)B_z - (A_x B_x + A_y B_y)C_z \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (4)$$

この式 (3) と (4) の右辺は等しいから，与式は示された．

この問題は，成分を書くのが面倒くさく，もっと簡単にできないかと考えたくなる．その例を簡単に紹介する．まず，ベクトル積の幾何学的な意味を考える． $\mathbf{B} \times \mathbf{C} = \mathbf{D}$ と置くと，ベクトル $\mathbf{D}$ は $\mathbf{B}$ と $\mathbf{C}$ に垂直な方向を向いている．求めたいベクトル $\mathbf{E} = \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{D}$ はベクトル $\mathbf{D}$ と垂直なので，結果として $\mathbf{B}$ と $\mathbf{C}$ の2つのベクトルで張られる面に平行であることがわかる．つまり，2つの定数 j, k を用いて，

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = j\mathbf{B} + k\mathbf{C}$$

と表される．また， $\mathbf{E}$ は $\mathbf{A}$ と垂直 ($\mathbf{A} \cdot \mathbf{E} = 0$) であることから，両辺に $\mathbf{A}$ との内積をとり，

$$j\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + k\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = 0$$

となる．別の定数 l を用いて，

$$j = l\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}, \quad k = -l\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$$

であることがわかり，まとめると，

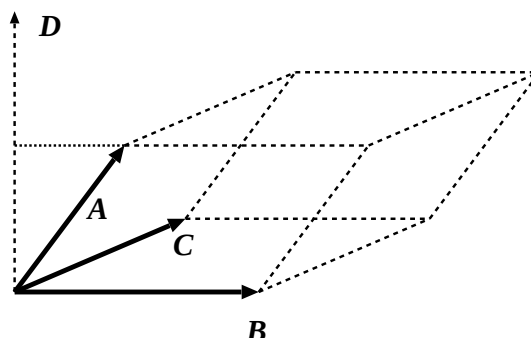
$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = l(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - l(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$$

となる．この式は $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ に対して線形である．つまり，例えばそれぞれのベクトルを2倍しても成り立つ式である．ここまでは方向の議論しかしていないので，全体のスケールの不定性が未定定数 l として残っている．そこで，何かしら特別なベクトルについて，

成り立つように定数 l を決めて良い． $\mathbf{A} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{B} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{C} = (1, 0, 0)$ とすると， $l = 1$ がわかり，与式が成り立つことが示された．

2.2

ここでは実際に $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ の図形をちゃんと書いてみる必要がある．この他にも座標系は右手系を使っている⁴．右図のように3つのベクトルをとったとする．



まず，ベクトル $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$ を $\mathbf{D}$ とおくと，ベクトル $\mathbf{D}$ の方向は $\mathbf{B}$ と $\mathbf{C}$ に垂直で，大きさはその2つのベクトルで書かれる平行四辺形の面積である．この $\mathbf{D}$ と $\mathbf{A}$ との内積は，2つのベクトルのなす角を θ として， $\mathbf{A} \cdot \mathbf{D} = |\mathbf{A}| |\mathbf{D}| \cos \theta$ と書ける． $|\mathbf{A}| \cos \theta$ は $\mathbf{D}$ への射影であるから，平行四辺形に対する高さである．結局， $\mathbf{A} \cdot \mathbf{D}$ は平行六面体の体積であることがわかる． θ が鈍角の場合も同様な議論ができ，全体に絶対値をつけておく必要がある．

⁴直交座標を定義するときに， x 軸， y 軸を定義した後の z 軸の方向には向きの任意性がある．右手系では， x, y 軸をそれぞれ右手の親指，人差指としたときに，中指の方向に z 軸をとるように座標系を設定する．

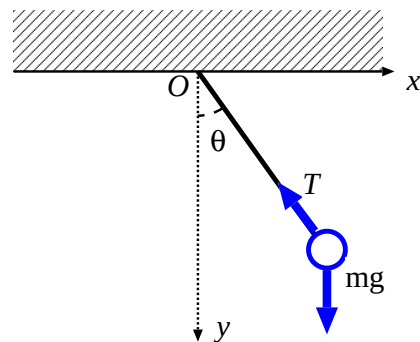
第二回物理学レポート問題

福島孝治 (東京大学大学院総合文化研究科)

問題 1 「落下運動の運動方程式」: 非常に高いビル (高さ H) から, パラシュートをか
つぎ初速度 0 で空気抵抗を受けて落下する. 落下開始から時刻 t^* だけたった後に
パラシュートを開くとする. パラシュートを開くことで, より大きな抵抗を受け
ると考えられる. 簡単のため, パラシュートを開く前は空気抵抗はないと考えて
よいとしよう. この問題の運動方程式をたてて, それを解き, t^* を適当に変えた
ときの, 速度を時間の関数として, 図示してみよう. 空気抵抗は適当にモデル化
してよい.

問題 2 「振り子の角運動量」

一様重力中の質量 m の振り子の運動方程式
を求めてみたい. 右図のように振り子の支
点を原点として座標を設定し, xy 平面を振
動する振り子運動を考えよう. 簡単のために
ヒモの重さは考えないことにし, その長さ l
は一定でたわまないとする. xy のそれぞ
れの運動方程式をたてることは可能であるが,
その際にヒモが重りを引っ張る張力 T を xy
のそれぞれの成分に分解する必要がある.



ところが, 張力は振り子の運動に依存して, 時々刻々変化する量である. 運動方
程式を解く際に, 運動がわからないと決まらない力があるのはやっかいのような
気がする. そこで, 角運動量の運動方程式 (トルクの方程式を考える.

1. 振り子の位置ベクトル $\mathbf{r}$ を $\mathbf{r} = (l\sin\theta(t), l\cos\theta(t), 0)$ とする. 角運動量ベクトル $\mathbf{l}$ を求めよ. θ は振り子と鉛直方向のなす角とする.
2. 張力 T はトルク $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ には関係ないことを説明せよ.
3. トルク・ベクトルを求めよ.
4. トルクの方程式を求めよ. θ が十分小さいとき, 運動方程式は

$$m\ddot{\theta} = -\frac{mg}{l}\theta$$

となることを示せ. これはレポート 1 の微分方程式と同じであり, 振動する.

5. **オプション** 角 θ が微小でないとき, どのようなになるかを考察せよ.

問題 3 「講義について」: 講義に関する感想・意見・要望があれば述べよ.

ルール: A4 片面で何枚でもよい. ただし, ホッチキスで閉じること. 氏名と学籍番号を明記のこと. ✂切は二週間後のこの講義まで. それまでに 16 号館 221A 室まで持ってきてよい.