

第二回力学レポート問題の解答例とコメント

福島孝治 (東京大学院総合文化)

2012 年 6 月 6 日: ver. 1.0

問題の趣旨: 1 階の微分方程式を解いて, 初期条件の接続を正しく行う練習問題である.

問題では空気抵抗の詳細は限定していないので, 自分で適当に仮定することになる. ここでは運動方程式は, 速度に比例した抵抗を仮定すると,

$$m\ddot{z} = -mg - \kappa(t)\dot{z} \quad \text{with } \kappa(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < t^* \\ \kappa & \text{for } t > t^* \end{cases}$$

となる. ただし, κ は空気抵抗の抵抗係数を表し, $t > t^*$ ではパラシュートを開くこととする. 運動方程式は速度 v に対する一階微分方程式に

$$\dot{v} = -g - \frac{\kappa}{m}v$$

なる. これは変数分離で解くことが出来る⁵. その一般解は, 積分定数 C を用いて,

$$v = \frac{m}{\kappa} \left(Ce^{-\frac{\kappa}{m}t} - g \right)$$

と表せる. 時間の進行とともに順番に定数を決めて行く.

1. $t < t^*$ のとき, $t = 0$ で初速度 0 だから, $C = g$ なので,

$$v = \frac{mg}{\kappa} \left(e^{-\frac{\kappa}{m}t} - 1 \right)$$

となる. この時間領域では, $\kappa = 0$ とするので, その極限を正しくとると⁶

$$v(t) = -gt$$

と, 自由落下の式になる.

2. $t = t^*$ での条件は, $v(t^*) = -gt^*$ となるので, これを初期条件として, 改めて定数 C を決めればよい.

$$-gt^* = \frac{m}{\kappa} \left(Ce^{-\frac{\kappa}{m}t^*} - g \right)$$

これを C について, 解くと,

$$C = e^{\kappa/m t^*} g \left(1 - \frac{\kappa t^*}{m} \right)$$

となる.

⁵線形微分方程式の解法を用いてもよい.

⁶そのまま $\kappa \rightarrow 0$ とすると, $\frac{0}{0}$ となるが, $\kappa \ll 1$ のときには, $\exp(-\frac{\kappa t}{m}) \simeq 1 - \frac{\kappa}{m}t + O(\kappa^2)$ であるから,

$$\frac{e^{-\frac{\kappa t}{m}} - 1}{\kappa} = -\frac{t}{m} + O(\kappa),$$

となり, 上の式が示される.

3. これらをまとめると，

$$v(t) = \begin{cases} -gt & \text{for } t < t^* \\ \frac{mg}{\kappa} \left(\left(1 - \frac{\kappa t^*}{m}\right) e^{-\frac{\kappa}{m}(t-t^*)} - 1 \right) & \text{for } t \geq t^* \end{cases}$$

となる．典型的な場合を図 (図) を示しておく．

この運動は，最終的には κ で定まる終端速度 $-\frac{mg}{\kappa}$ に収束するが， t^* での速度とその終端速度との大小関係から，単調か速度を減少させるかが変わって来る．単調である条件は， $v(t^*) > -\frac{mg}{\kappa}$ で決まる．

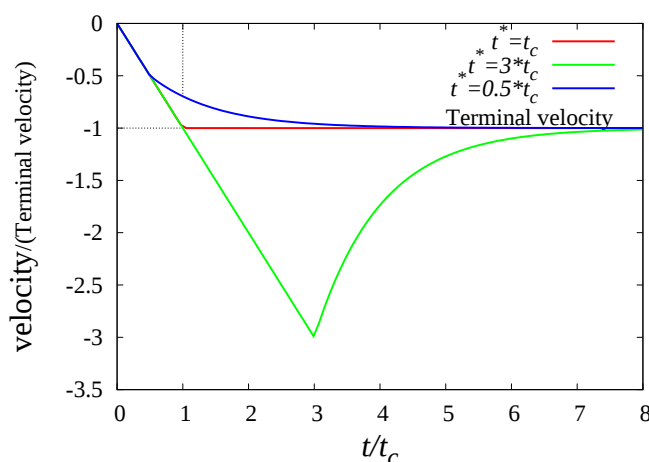


図 1: 速度の時間依存性． $t = t^*$ で $v(t)$ が κ の終端速度になっている時間の条件を t_c とする．ここでは，速度は終端速度で規格化し，時間は特性時間 t_c で規格化した．グラフには，3つのプロット ($t^* = t_c, t^* = 0.5t_c, t^* = 3t_c$) を描いた．

問題の趣旨：2. 角運動量が出てきたので，一度手を動かして，特にベクトルとしての角運動量を理解することを目的とする⁷．

2-1. まず，振り子運動する物体の角運動量（ベクトル）求める．角運動量はどこからみるのかを決めないと決まらないが，原点を振り子の支点にしたので，原点からみた角運動量を考える．もっともそれが運動方程式を書くときに適しているからである．振り子は xy 面内を振動するとき，位置ベクトルを $\mathbf{r} = (l \sin \theta, l \cos \theta, 0)$ となる．振り子の糸はたるまないとして，運動量 $\mathbf{p}$ は，

$$\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}} = (m\dot{l}\cos\theta, -m\dot{l}\sin\theta, 0)$$

となる．定義に従いベクトルである角運動量を求めると，

$$\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = (l \sin \theta, l \cos \theta, 0) \times (m\dot{l}\cos\theta, -m\dot{l}\sin\theta, 0) = (0, 0, -ml^2\dot{\theta})$$

と求められる．この物体の角運動量は z 軸の方向をむいている．さらに，問題図の座標系では， z 軸は紙面の奥方向を向いているが，振動運動の θ が増える方向に触れているときの角運動量はこちらを向いている．

⁷問題文は間違っていた．図を尊重して，文中の表記を正しく直すことにする．すなわち，2-1 の文中の位置ベクトルは正しくは $\mathbf{r} = (l \sin \theta, l \cos \theta, 0)$

2-2. この物体に働く力は空気抵抗を考えなければ，重力 F_g と糸からの張力 F_T である．重力は時間に依存せずに常に，

$$\mathbf{F}_g = (0, mg, 0)$$

となっている．一方で，張力は時間に依存して大きさも方向も変わる．それを事前に求めることは一般には難しい．ただし，方向は常に $-\mathbf{r}$ に平行である．このことから，

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F}_T \propto \mathbf{r} \times -\mathbf{r} = 0$$

となり，常にゼロとなる．

2-3. 前問の結果を用いて，トルク $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ を求めると，

$$\mathbf{r} \times (\mathbf{F}_g + \mathbf{F}_T) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_g = (l \sin \theta, l \cos \theta, 0) \times (0, mg, 0) = (0, 0, mlg \sin \theta)$$

となる．

2-4. 以上の結果をまとめて，運動方程式を求める．特に，トルクの方程式（角運動量の運動方程式）

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \dot{\mathbf{l}},$$

を求めると， z 成分しかないことがわかり，それは，

$$mgl \sin \theta = -ml^2 \ddot{\theta}, \quad \ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta$$

となる．特に，角度 θ が十分小さいときには， $\sin \theta = \theta + O(\theta^3)$ なので， $ml^2 \ddot{\theta} = -mgl\theta$ と，バネの運動方程式が導かれる．

通常の運動方程式をあらわに書き下すと，張力が陽に入った運動方程式が導かれる．その張力は運動方程式を解いた後に初めて決まる物理量になっている．上で求めたように，角運動量の運動方程式には張力は全く入ってこなくて，簡単になっている．張力のように物体の運動を制限する力は一般に拘束力と呼ばれるが，運動方程式を解く際にはこの理由によって難しい問題になる．うまく消去できると，それはうれしいわけである．

2-5. 運動方程式がバネと同じになるということは，バネと同じ運動が得られるということである．対応関係から，角振動数は， $\omega = \sqrt{g/l}$ となり，周期 T は $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ となることがわかる．ここではオプション問題として，微小振動でなくなったときに，どうなるかを議論することを問いにした．この問題は簡単ではなく，振動の周期を求めようとすると，初等積分では計算できなくて，第一種の完全楕円積分と呼ばれる積分になる．この楕円積分にはここでは深入りしないことにする．ちょっと高度な力学の教科書を見て欲しい．

ここでは，素朴に角度が微小でなくなったときに，周期は大きくなるのか小さくなるのかを調べてみることにする．もちろん，楕円積分の結果をみればわかるのだが，そんなに高度なことをしなくても，地道にその問いには答えることができる⁸．

⁸地道な方法の良さは，どんな問題でもある程度対応できることにある．以下に示すような計算ができることは理系人間のたしなみと思って良い．

初期条件として, $\theta(t=0) = \theta_0$, $\dot{\theta} = 0$ とする. 微分方程式の両辺に $\dot{\theta}$ を掛けて, 時間で一回積分する:

$$\int_0^t dt' \dot{\theta} \ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \int dt' \dot{\theta} \sin \theta$$

$$\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 = -\frac{g}{l} \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta' \sin \theta' = \frac{g}{l} (\cos \theta - \cos \theta_0)$$

これを $\dot{\theta}$ について解くと,

$$\dot{\theta} = \pm \sqrt{\frac{2g}{l}} (\cos \theta - \cos \theta_0)^{1/2} = \pm 2\sqrt{\frac{g}{l}} \left(\sin^2 \frac{\theta_0}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)^{1/2}$$

となる. もう一度積分するのが難しい. ここで周期を求めることを考える. 上に述べた初期条件の下で, $\theta = 0$ まで運動することを考えると, これは $1/4$ 周期分であり, その間 $\dot{\theta} < 0$ であるので, 上の運動方程式のうち $-$ の方が適切である. 周期を T として, 時間について $0 < t < T/4$ まで積分することにする. 初速度がゼロとしたので, θ の最大値は θ_0 であり, どちらも小さいとする. $\sin(\theta/2)$ を展開して,

$$\sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) = \left(\frac{\theta}{2} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\theta}{2} \right)^3 + O(\theta^5) \right)^2 = \frac{\theta^2}{4} - \frac{\theta^4}{48} + O(\theta^5)$$

代入すると微分方程式は,

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= -2\sqrt{\frac{g}{l}} \left(\frac{\theta_0^2}{4} - \frac{\theta_0^4}{48} - \frac{\theta^2}{4} + \frac{\theta^4}{48} + O(\theta^5, \theta_0^5) \right)^{1/2} \simeq -\sqrt{\frac{g}{l}} \left(\theta_0^2 - \theta^2 - \frac{1}{12} (\theta_0^4 - \theta^4) \right)^{1/2} \\ &= -\sqrt{\frac{g}{l}} (\theta_0^2 - \theta^2)^{1/2} \left(1 - \frac{\theta_0^2 + \theta^2}{12} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

となる. これは変分離型なので, 分離して時間を 0 から $T/4$ まで積分する.

$$\int_0^{T/4} \frac{\dot{\theta}}{(\theta_0^2 - \theta^2)^{1/2} \left(1 - \frac{\theta_0^2 + \theta^2}{12} \right)^{1/2}} dt = -\sqrt{\frac{g}{l}} \int_0^{T/4} dt = -\sqrt{\frac{g}{l}} \frac{T}{4}$$

左辺はごちゃごちゃと積分すると,

$$\int_0^{\theta_0} d\theta \frac{1}{(\theta_0^2 - \theta^2)^{1/2} \left(1 - \frac{\theta_0^2 + \theta^2}{12} \right)^{1/2}} \simeq \int_0^{\theta_0} d\theta \frac{1}{(\theta_0^2 - \theta^2)^{1/2}} \left(1 + \frac{\theta_0^2 + \theta^2}{24} \right) = \dots = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{32} \theta_0^2$$

となる. まとめると,

$$T = \sqrt{\frac{l}{g}} 4 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{32} \theta_0^2 \right) = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16} \right)$$

となる. 最初の項が微小近似から求まる項であり, 第二項が次の補正項である. θ_0^2 の項から始まり, 正である. つまり, 振り子を大きく振ると周期は長くなるのである.